Le principali fonti di questi appunti sono:
Luciano Daboni, Ricerca Operativa, Zanichelli, Bologna 1985
Paolo Agnoli, Francesco Piccolo, Probabilità e scelte razionali, Armando, Roma 2008
Alcuni degli esempi esposti sono tratti direttamente da questi testi, altri ne prendono spunto.

La Teoria delle Decisioni

La Teoria delle Decisioni, o Ricerca Operativa, è la branca della matematica che si occupa del comportamento di un "individuo coerente" tra più alternative, ciascuna delle quali può dare luogo a conseguenze, *certe* o *incerte*; si parlerà rispettivamente di *decisioni in condizioni di certezza* e *decisioni in condizioni di incertezza.* L'obiettivo è quello di fornire un supporto all'assunzione di decisioni. Per giungere a questo scopo, la ricerca operativa fornisce strumenti matematici di supporto alle attività decisionali in cui occorre gestire e coordinare attività e risorse limitate al fine di massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo.

Nel caso particolare di problemi di carattere economico, la funzione da massimizzare può coincidere con il massimo profitto ottenibile o con il minor costo da sostenere.

Nel caso in cui le "decisioni" siano tra oggetti non direttamente misurabili come grandezze scalari, bisogna comunque ricondursi a questa situazione. Bisogna infatti stabilire un criterio di *preferenza* tra gli elementi dell'insieme A i cui elementi sono le *conseguenze* delle decisioni assunte. Per esempio, supponiamo di dover assumere in un'azienda un impiegato per determinate mansioni. L'insieme A ha per elementi i candidati che hanno fatto domanda di assunzione. Normalmente, in una situazione come questa si esaminano le caratteristiche dei candidati, assegnando un punteggio entro un intervallo prestabilito a ciascuna caratteristica del candidato tra quelle rilevanti nella circostanza: titoli di studio, esperienze lavorative precedenti, conoscenza di lingue straniere ecc. La somma dei punteggi corrispondenti alle diverse categorie costituisce il punteggio con il quale ogni candidato entra in graduatoria; in questo modo si stabilisce la *preferenza* di un candidato rispetto a tutti coloro che hanno un punteggio inferiore; in caso di uguale punteggio, i due candidati (le due scelte) risultano *indifferenti*; nella realtà andrà stabilito un ulteriore criterio per risolvere il dilemma, potrebbe eventualmente essere anche un sorteggio.

Il metodo illustrato in questo esempio è sistematicamente adottato nella Teoria delle decisioni: a ciascun elemento x dell'insieme A si associa secondo una determinata regola un numero reale $w(x)$; x_1 sarà *preferito* a x_2 se $w(x_1) > w(x_2)$; x_1 e x_2 saranno *indifferenti* se $w(x_1) = w(x_2)$. Si osserva immediatamente che la relazione di *preferenza* così definita in A è di *ordine stretto* (antiriflessiva, antisimmetrica, transitiva), e la relazione di *indifferenza* è di *equivalenza* (riflessiva, simmetrica, transitiva).

Uno degli aspetti più rilevanti della Teoria delle decisioni è la definizione della funzione w che stabilisce la preferenza tra decisioni diverse. Si desidera infatti fornire regole prescrittive del comportamento di operatori (per esempio) economici, per indirizzare le loro scelte. Non c'è dunque una regola per definire w; semplicemente, per avere un'applicabilità pratica, questa dovrà fornire risultati che possano essere condivisi dagli operatori che se ne devono servire.

Il problema non esiste quando la conseguenza di ciascuna decisione è essa stessa un valore scalare, tipicamente un profitto o una costo, che naturalmente si desidera rendere (rispettivamente) massimo o minimo:

Esempio (il trasportatore). Un imprenditore nel campo del trasporto merci possiede 5 camion, e ha 6 autisti alle sue dipendenze. Egli può scegliere se impegnare i suoi automezzi e i suoi autisti in trasporti "brevi" che impegnano ciascuno un solo camion e un solo autista, o trasporti "lunghi", nei quali per un camion occorrono due autisti. Da ciascun trasporto breve l'imprenditore ottiene un guadagno di 1200€; da ciascun trasporto lungo, 2500€. Stabilire qual è il migliore impiego di automezzi e personale, al fine di massimizzare il guadagno.

Soluzione. È chiaro che conviene impiegare il massimo delle risorse disponibili (automezzi oppure autisti); ma non è detto che la decisione che ottimale sia quella che impiega *tutti* i camion e *tutti* gli autisti. Le alternative possibili sono poco numerose, quindi non è difficile elencarle tutte:

brevi	5	4	2	0
lunghi	0	1	2	3
guadagno complessivo	6000	7300	7400	7500
guadagno per un viaggio breve	1200			
guadagno per un viaggio lungo	2500			

Si nota che il profitto massimo, 7500€, si ottiene con 3 viaggi lunghi; in questo modo vengono utilizzati tutti i 6 autisti, ma due camion rimangono fermi. La scelta (4,1), cioè 4 viaggi brevi e 1 lungo, che avrebbe impiegato per intero sia gli automezzi, sia il personale, è meno conveniente.

Con altri numeri la decisione migliore può essere diversa: se, per esempio, il guadagno per un viaggio breve non è più 1200€ bensì 1500€, si hanno i seguenti risultati

brevi	5	4	2	0
lunghi	0	1	2	3
guadagno complessivo	7500	8500	8000	7500
guadagno per un viaggio breve	1500			
guadagno per un viaggio lungo	2500			

In questo caso è (4,1) la decisione migliore.

Una classe di problemi in cui ciascuna "decisione" corrisponde in modo naturale a un valore scalare, usualmente indicatore di un guadagno, è quello della *programmazione lineare*: determinare il massimo valore assunto da un polinomio omogeneo di grado 1, $p(x) = p(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ caratterizzato da vincoli di non negatività ($x_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$) e da m vincoli lineari

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j = b_i\,,\quad 1 \leq i \leq m,\quad 1 \leq j \leq n$$

Per risolvere questo tipo di problema esiste un metodo specifico, l'*algoritmo del simplesso*; tratteremo questo specifico argomento in altra sede. Per inciso, notiamo che l'esempio portato sopra (il trasportatore) rientra in questa classe; indichiamo infatti con:

x_1, il numero di camion impegnati;

x_2, il numero di autisti impegnati;

x_3, il numero di camion tenuti fermi;

x_4, il numero di autisti non utilizzati;

n, il numero di viaggi "brevi";

m, il numero di viaggi "lunghi";

allora valgono le relazioni

$$n + m = x_1\,;\quad n + 2\,m = x_2$$

dalle quali segue

$$n = 2\,x_1 - x_2\,;\quad m = x_2 - x_1$$

il problema che ci siamo posto è quello di rendere massimo il valore della funzione

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1200\,m + 2500\,n = 1200 * (2\,x_1 - x_2) + 2500 * (x_2 - x_1)$$

con le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 soggette ai vincoli di non negatività e inoltre tali che

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = 5 \\ x_2 + x_4 & = 6 \end{cases}$$

Criteri di decisione quando le conseguenze non sono valori scalari

In tutti i casi in cui la conseguenza di ciascuna decisione non è un valore scalare occorre definire la funzione $w(\bullet)$ che a ciascun $x \in A$ (conseguenze delle decisioni) associa il corrispondente scalare $w(x)$ che servirà per stabilire la "graduatoria". Un caso tipico è il seguente.

Capitali disponibili in uno o più istanti futuri

1) Caso senza controprestazione monetaria immediata: confronto dei valori attuali

Si deve decidere tra due o più *rendite*, cioè insiemi di pagamenti (da effettuare o ricevere) di importo fissato, disponibili in tempi futuri; va tenuto in considerazione anche il differimento dei pagamenti, a causa del quale in determinate situazioni potrebbe essere preferibile per il debitore una soluzione che comporta una spesa maggiore, ma pagamenti più lontani nel tempo; simmetricamente, potrebbe essere preferibile per il creditore una soluzione che comporta un incasso minore, ma pagamenti più ravvicinati.
Bisogna associare a ciascuna delle due alternative un valore scalare, per rendere possibile il confronto.
Una possibilità ragionevole è associare a ciascuna rendita il suo *valore attuale*, che conveniamo di calcolare sempre con le regole della capitalizzazione composta, rispetto a un determinato tasso i "di mercato". Si tratta di un modello matematico alquanto semplificato, che suppone in modo non molto verosimile l'esistenza di un tasso di mercato uguale per tutti gli operatori e invariante nel tempo; è comunque un modo ragionevole per assegnare un valore al differimento dei pagamenti. In funzione del tasso di mercato si ottengono valori attuali diversi, e quale sia la decisione migliore dipende dal tasso, come vedremo nel seguente esempio.

Esempio. Immaginiamo di richiedere un servizio in natura, per esempio una ristrutturazione edilizia; dobbiamo scegliere tra due imprese: per lo stesso lavoro, la prima chiede 2200€ tra sei mesi, e ulteriori 3500€ tra un anno; la seconda 6000€ in unica soluzione, da pagare tra due anni. Quale delle due alternative conviene scegliere?

Soluzione. Come abbiamo detto sopra, assegnato il tasso di mercato i, calcoliamo i valori attuali di ciascuna delle due rendite. Osserviamo che in questo esempio la scelta migliore è quella dal valore attuale *minimo*, perché siamo nei panni di colui che paga.

	decisioni	d1	d2
tempi (anni)			
0,5		2200	
1		3500	
2			6000

val. attuale	val.attuale	tasso
5565,78	5655,58	0,03
5480,31	5442,18	0,05
5397,85	5240,63	0,07
5279,44	4958,68	0,1

Vediamo che il tasso 0,03 cioè 3% rende preferibile d_1; tassi più alti rendono preferibile d_2, in modo sempre più marcato al crescere di i; il significato di ciò è che più è elevato il tasso, tanto maggiore è il valore del tempo, per cui il maggiore differimento nel pagamento in d_2 compensa l'importo complessivamente più elevato che ci impegniamo a pagare: 6000€ anziché 5700€. Al contrario, tassi molto piccoli portano più facilmente a scegliere l'alternativa per la quale è minima la somma degli importi delle rate, perché in tal caso i rispettivi valori attuali differiscono assai poco dall'importo effettivo.

I) Caso con controprestazione monetaria immediata: confronto dei tassi interni di rendimento

Come nel caso precedente, la decisione che si deve assumere è la scelta tra due o più rendite. La differenza è che ciascuna di queste rendite costituisce il compenso per un pagamento immediato di importo noto C, uguale per tutte le rendite considerate. Lo scenario, visto ancora dalla parte di uno o dell'altro dei due attori, può essere:

"Investimento": Abbiamo una somma di denaro C da investire, in cambio della quale diverse controparti ci offrono rendite diverse per importi e tempi di pagamento delle rate.

"Finanziamento": Abbiamo bisogno di una somma di denaro C; diverse controparti ci offrono C in prestito, chiedendo in cambio rendite diverse per importi e tempi di pagamento delle rate.

Un indicatore ragionevole della minore o maggiore convenienza di ciascuna decisione è il *tasso interno di rendimento*, cioè il tasso i con il quale il valore attuale della rendita considerata sia proprio uguale a C. Nel caso dell'investimento questo criterio di scelta propone di decidere per l'investimento che offre un t.i.r. maggiore; nel caso del finanziamento, al contrario, è da preferire quello che impone un tasso minore.

Anche in questo caso il criterio non è esente da possibili critiche, perché, per esempio, potrebbe non essere gradito a un investitore realizzare il frutto del suo investimento in un tempo eccessivamente lungo, anche se ben remunerato in termini di tasso; qui ci si limita ad assumere questo criterio di scelta e a trarne le conseguenze.

Esempio. Dobbiamo investire la somma di 5500€; una Banca ci offre in cambio un'obbligazione che pagherà 2200€ tra sei mesi, e ulteriori 3500€ tra un anno; un'altra Banca offre un'obbligazione che rimborserà 6000€ in unica soluzione, tra due anni. Quale delle due alternative conviene scegliere, se come criterio di scelta si assume il t.i.r.?

Soluzione. Calcoliamo il tasso interno di rendimento di ciascuna delle due obbligazioni.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \_ & \text{decisione} & d_1 & d_2 \\ \text{tempo} & \_ & \_ & \_ \\ 0.5 & \_ & 2200 & 0 \\ 1 & \_ & 3500 & 0 \\ 2 & \_ & 0 & 6000 \end{pmatrix}; \ \mathbf{c} = 5500;$$

$$\text{Print}\left[\text{FindRoot}\left[\sum_{k=3}^{5} a[[k]][[3]] * (1+i)^{-a[[k]][[1]]} == c, \{i, 0.02\}\right]\right];$$

$$\text{Print}\left[\text{FindRoot}\left[\sum_{k=3}^{5} a[[k]][[4]] * (1+i)^{-a[[k]][[1]]} == c, \{i, 0.02\}\right]\right];$$

```
{i → 0.045329}
{i → 0.0444659}
```

Il tasso interno di rendimento corrispondente a d_1 è leggermente maggiore di quello corrispondente a d_2; se il criterio di scelta assunto è quello del t.i.r., preferiremo investire in d_1.

Osservazione. La scelta effettuata in base al t.i.r. non dipende soltanto da importi e tempi delle rate che ci verranno corrisposte, ma anche dall'importo investito, nel senso che le stesse prestazioni offerte da d_1 e d_2 in cambio di un importo C diverso da 5500€ potrebbero condurre a una scelta differente. Per esempio, con $C = 5600$ si ottiene

```
a = ( _      decisione  d1    d2
      tempo    _         _     _
      0.5      _        2200   0
      1        _        3500   0
      2        _        0      6000 ); c = 5600;
```

$$\text{Print}\left[\text{FindRoot}\left[\sum_{k=3}^{5} a[[k]][[3]] * (1+i)^{-a[[k]][[1]]} == c, \{i, 0.02\}\right]\right];$$

$$\text{Print}\left[\text{FindRoot}\left[\sum_{k=3}^{5} a[[k]][[4]] * (1+i)^{-a[[k]][[1]]} == c, \{i, 0.02\}\right]\right];$$

```
{i → 0.0221925}
{i → 0.0350983}
```

Questa volta è sensibilmente maggiore il t.i.r. corrispondente a d_2, la quale sarà dunque preferita a d_1. Ciò dipende dal fatto che il rendimento di un investimento di breve durata è più sensibile alla variazione del prezzo di quanto lo sia un investimento su tempi maggiori; questo fatto si nota anche nel nostro esempio: l'aumento di 100€ del prezzo, da 5500 a 5600, ha causato una diminuzione del t.i.r. per entrambe le alternative, però assai maggiore per d_1.

Si possono naturalmente porre problemi in cui l'elemento incognito è un altro dei numeri in gioco; per esempio:

Quale è il prezzo *C* relativamente al quale le obbligazioni d_1 e d_2 sono *indifferenti*, secondo il criterio del massimo t.i.r.?

Soluzione. Se il prezzo *C* è tale che d_1 e d_2 risultano equivalenti, vuol dire che il t.i.r. corrispondente a d_1 e d_2 acquistate al prezzo *C* è lo stesso per d_1 e per d_2, sia *i* questo tasso. Al tasso *i*, sono quindi uguali tra loro (e uguali a *C*) i valori attuali di d_1 e d_2. In questo modo calcoliamo *i*:

```
a = ( _      decisione  d1    d2
      tempo    _         _     _
      0.5      _        2200   0
      1        _        3500   0
      2        _        0      6000 );
```

$$\text{Print}\left[\text{FindRoot}\left[\sum_{k=3}^{5} a[[k]][[3]] * (1+i)^{-a[[k]][[1]]} == \sum_{k=3}^{5} a[[k]][[4]] * (1+i)^{-a[[k]][[1]]}, \{i, 0.02\}\right]\right];$$

```
{i → 0.0438857}
```

Il valore attuale di una qualsiasi tra d_1 e d_2, rispetto a quest'ultimo tasso, è il prezzo *C* rispetto al quale d_1 e d_2 sono indifferenti.

$$i = 0.04388566536343282\text{`}; \text{Print}\left[\sum_{k=3}^{5} a[[k]][[4]] * (1+i)^{-a[[k]][[1]]}\right]$$

```
5506.12
```

È un valore molto vicino a 5500, dato nel primo esempio; infatti in quel caso i due t.i.r. relativi a d_1 e d_2 erano risultati molto vicini.

Decisioni in condizioni di incertezza

Come avevamo già accennato, si parla di *decisioni in condizioni di incertezza* quando le decisioni che si possono assumere portano come conseguenza una variabile aleatoria di cui è nota la dis-

tribuzione di probabilità. Supporremo sempre che queste variabili rappresentino importi monetari. Il criterio di scelta consiste ancora nell'assegnare a ciascuna "conseguenza" un valore scalare certo e stabilire la regola di scegliere la decisione corrispondente al massimo (o minimo, secondo i casi) di questi valori. Non si esclude che alcune delle "conseguenze" siano valori certi, altri aleatori; d'altra parte, i valori certi possono essere visti come casi particolari di variabili aleatorie con un solo valore possibile avente probabilità 1, quindi non richiedono un trattamento specifico.
Per confrontare tra loro diverse variabili aleatorie è ragionevole attribuire a ciascuna di esse un valore equivalente certo, intermedio tra quelli che la variabile osservata può assumere. La scelta che sembra più naturale è quella della *media*, o *speranza matematica* della variabile X osservata, definita da

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k * p_k, \quad E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k * p_k \quad \text{oppure} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)\, dx$$

secondo che, rispettivamente, X sia una variabile discreta e finita, una variabile discreta e numerabile, una variabile assolutamente continua con densità f; negli ultimi due casi bisogna supporre che la somma della serie, o l'integrale, esistano.
Questa scelta è implicitamente assunta nella definizione di "gioco equo": una scommessa è detta *equa* se la media della vincita è uguale a 0, cosicché sia *indifferente* la scelta di partecipare alla scommessa (con esito aleatorio), o di non partecipare (con esito certo, di un guadagno pari a zero). Su questo principio poggia anche la soluzione proposta da Pascal e Fermat riguardo alla "divisione della posta" nella partita interrotta prima del termine: ciascun giocatore riceverà una frazione del premio in palio, uguale alla speranza matematica della variabile X che rappresenta la cifra che egli riceverebbe se la partita fosse portata a termine; in tale modo per ciascuno dei giocatori sarà indifferente scegliere se accettare questo importo certo oppure proseguire il gioco fino al suo termine naturale.

Esempio (l'imprenditore edile, prima puntata). Un imprenditore dispone di 1 milione di €, che può decidere di investire in un prodotto finanziario che tra due anni gli restituirà il capitale, più un interesse del 10%. In alternativa, può acquistare un terreno fabbricabile e costruire su di esso. In tal caso esiste esiste la possibilià che all'inizio dei lavori si trovino reperti archeologici; la probabilità di questo evento è valutata in 0,6. Se ciò accade, i lavori andranno assai ridimensionati, e l'imprenditore potrà fra due anni realizzare soltanto 0,7 milioni rivendendo il terreno, con una perdita di 0,3 milioni; altrimenti il ricavo sarà di 2 milioni. Stabilire quale scelta conviene all'imprenditore, secondo il criterio della massima speranza matematica.

Soluzione. Sia E l'evento "Il terreno contiene reperti archeologici", $\overline{E}$ l'evento contrario; quindi $P(E) = 0.6$ e $P(\overline{E}) = 0.4$. La seguente tabella contiene i possibili guadagni netti, (negativi se sono perdite), nei diversi casi associati alla decisione d_1 (investimento finanziario) e d_2 (investimento immobiliare) e al verificarsi di E o del suo contrario

	d1	d2	probabilità
E	0,1	-0,3	0,6
non E	0,1	1	0,4
Medie	0,1	0,22	

Il criterio della massima speranza matematica prescrive quindi di assumere la decisione di investire nel settore immobiliare, più rischiosa perché contiene il rischio di realizzare una perdita ingente, con probabilità non piccola!
Si intuiscono già qui buone ragioni per mettere in discussione la bontà in assoluto del criterio della massima speranza matematica per scelte economiche, riprenderemo più avanti questo aspetto; per ora ci limitiamo a mostrare quali sono le scelte alle quali si giunge applicandolo.

La tabella che abbiamo usato nell'esempio qui sopra è un caso particolare del cosiddetto "*schema in forma normale*", che in generale avrà il seguente aspetto:

		Decisioni			
Eventi ↓	d_1	d_2	…	d_n	↓ *Probabilità*
$\mathcal{E}_1$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,n}$	p_1
$\mathcal{E}_2$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,n}$	p_2
⋮	…	…	…	…	⋮
$\mathcal{E}_m$	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	…	$x_{m,n}$	p_m
Medie →	$E(X_1) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,1} \cdot p_i$	$E(X_2) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,2} \cdot p_i$	…	$E(X_n) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,n} \cdot p_i$	

L'ultima riga mostra i "valori certi" che abbiamo convenuto di associare alle variabili aleatorie corrispondenti a ciascuna decisione; il loro confronto porterà alla scelta della decisione migliore, almeno secondo questo criterio.

Mostriamo altri due esempi di applicazione di questa tecnica.

Esempio ("l'orologiaio"). Un orologiaio tratta orologi preziosi di due marche, *Rolex* e *Omega.* Egli sa che nei prossimi giorni riceverà la visita di due facoltosi clienti, intenzionati ad acquistare un orologio, ciascuno dei due con la preferenza esclusiva per una delle due marche, preferenza che l'orologiaio non conosce affatto.
I rappresentanti delle due marche riforniscono l'orologiaio al costo c_R, c_O per ciascun pezzo, rispettivamente; l'orologiaio venderà gli orologi con rispettivi prezzi $v_R > c_R$, $v_O > c_O$; in caso di mancata vendita i rappresentanti accetteranno il reso, riconoscendo all'orologiaio un importo inferiore a quanto da lui pagato, rispettivamente $r_R < c_R$, $r_O < c_O$. Stabilire quale è la decisione migliore che l'orologiaio deve assumere per rendere massima la speranza matematica del suo guadagno, in funzione dei prezzi di acquisto, di vendita e di reso per ciascuna delle due marche trattate.

Soluzione. La mancanza di alcuna informazione sulla marca preferita da ciascun cliente porta a valutare in $\frac{1}{2}$ la probabilità che ciascuno dei due preferisca *R.* oppure *O.*; gli eventi relativi alle richieste che l'orologiaio riceverà sono quindi (R, R); (O, O); (R, O), i primi due con probabilità $\frac{1}{4}$ ciascuno, il terzo con probabilità $\frac{1}{2}$ (è come lanciare due monete, e calcolare la probabilità di "due teste"; "due croci", "una testa e una croce"). Le "decisioni" che l'orologiaio può assumere riguardano il rifornimento di orologi da vendere; indicato con x il numero di Rolex, con y il numero di Omega, le scelte "sensate" sono le coppie ordinate (x, y) con $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$; non più di due pezzi per ciascuna marca, perché i clienti sono soltanto due. In corrispondenza di ciascuna decisione (x, y) e al realizzarsi di ciascuno dei tre eventi aleatori si calcola facilmente il "guadagno" (positivo o negativo) dell'orologiaio, come differenza tra il suo ricavo proviniente da vendite e resi, e la spesa sostenuta per l'acquisto degli orologi dai rappresentanti.
Per esempio, se la decisione è (2, 1) e la richiesta sarà (R, O), il guadagno sarà

$$v_R + v_O + r_R - (c_O + 2\, c_R)$$

In questo modo si compila la tabella che vediamo qui sotto; i sei prezzi sono stati valorizzati come indicato in tabella, a titolo di esempio.

		Fornitura *R* (*x*)	0	0	1	0	1	2	1	2	2
		Fornitura *O* (*y*)	0	1	0	2	1	0	2	1	2
Richiesta *R* (*m*)	Richiesta *O* (*n*)										
0	2		0	8	-12	16	-4	-24	4	-16	-8
1	1		0	8	10	-3	18	-2	7	6	-5
2	0		0	-11	10	-22	-1	20	-12	9	-2
		Medie	0	3,25	4,5	-3	7,75	-2	1,5	1,25	-5
		c*R*	c*O*	v*R*	v*O*	r*R*	r*O*		p1	p2	p3
	dati:	20	17	30	25	8	6		0,25	0,5	0,25

Il massimo guadagno atteso si ha in corrispondenza della scelta (x, y) = (1, 1), che corrisponde all'evento più probabile riguardo ai desideri dei due clienti; valori diversi dei prezzi potrebbero tuttavia condurre a preferire scelte diverse, come mostreremo tra poco.

Osserviamo che il calcolo delle medie corrispondenti alle ultime tre colonne della tabella è superfluo, perché in ognuna di tali colonne ciascuno dei tre valori della variabile "guadagno" è mimore o uguale al corrispondente valore di una madesima altra colonna; per esempio, ogni termine della terzultima colonna, che è $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$ è minore del corrispondente termine della seconda, cioè $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$; perciò, qualsiasi siano le probabilità, la media calcolata co i valori $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$ è sicuramente minore della media calcolata con $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$. Si dice che la terzultima colonna è *dominata* dalla seconda; la stessa cosa accade per la penultima e l'ultima.

Come accennavamo sopra, valori diversi dei prezzi possono condurre a scelte diverse: nella seguente tabella abbiamo modificato soltanto r_O, portandolo da 6 a 15

		Fornitura *R* (*x*)	0	0	1	0	1	2	1	2	2
		Fornitura *O* (*y*)	0	1	0	2	1	0	2	1	2
Richiesta *R* (*m*)	Richiesta *O* (*n*)										
0	2		0	8	-12	16	-4	-24	4	-16	-8
1	1		0	8	10	6	18	-2	16	6	4
2	0		0	-2	10	-4	8	20	6	18	16
		Medie	0	5,5	4,5	6	10	-2	10,5	3,5	4
		c*R*	c*O*	v*R*	v*O*	r*R*	r*O*		p1	p2	p3
	dati:	20	17	30	25	8	15		0,25	0,5	0,25

Questa volta la scelta migliore è $(x, y) = (1, 2)$; questo si spiega notando che il valore di reso di "Omega" è qui molto vicino al prezzo di acquisto; perciò il rischio collegato all'eventuale mancata vendita di un Omega è piuttosto basso.

Presentiamo un ulteriore esempio di problema di scelta in ambito commerciale, in qualche misura simile a quello visto sopra, perché di nuovo abbiamo a che fare con un commerciante che deve assumere una decisione riguardo alla fornitura, soggetto a un numero aleatorio di clienti che vorranno acquistare da lui.

Esempio (il giornalaio). Un giornalaio acquista dall'editore un certo numero di copie di un quotidiano, al prezzo c per ogni copia, e le rivende al prezzo $v > c$ per copia. Le copie invendute non vengono ritirate dall'editore, e costituiscono quindi per il giornalaio una perdita di c per ogni copia invenduta.

Si vuole calcolare, in funzione di c, v e della distribuzione di probabilità della variabile X, con valori interi ≥ 0, rappresentativa del numero di clienti che chiederanno quel giornale, quale sia il numero di copie del giornale che il giornalaio deve acquistare per rendere massimo il guadagno atteso.

Soluzione. Sia, per $h = 0, 1, 2, \ldots$, $p_h = P(X = h)$, e sia, per $n = 0, 1, 2, \ldots$, d_n la decisione di acquistare n copie del giornale. Alla decisione d_n è associato il guadagno aleatorio (positivo o negativo)

$$G_n = \begin{cases} h\,v - n\,c & \text{se } X = h \text{ per un } h \leq n \\ n\,(v - c) & \text{se } X = h \text{ per un } h > n \end{cases}$$

Dobbiamo determinare n in modo da rendere massima la speranza matematica $E(G_n)$. Svolgiamo prima il calcolo in modo diretto, più ingenuo; vedremo dopo come si può arrivare più semplicemente al risultato con un ragionamento un po' diverso.

$$E(G_n) = \sum_{h=0}^{n} (h\,v - n\,c) * p_h + n\,(v - c) \sum_{h=n+1}^{\infty} p_h \; = \; v\left(\sum_{h=0}^{n} h\,p_h + n \sum_{h=n+1}^{\infty} p_h\right) - n\,c \sum_{h=0}^{\infty} p_h =$$

$$= v\left(\sum_{h=0}^{n} h\, p_h + n \sum_{h=n+1}^{\infty} p_h\right) - n\, c \text{ , tenendo presente che } \sum_{h=0}^{\infty} p_h = 1.$$

Sostituendo n con $n+1$ nella formula ricavata sopra abbiamo

$$E(G_{n+1}) = v\left(\sum_{h=0}^{n+1} h\, p_h + (n+1) \sum_{h=n+2}^{\infty} p_h\right) - (n+1)\, c$$

Adesso calcoliamo la differenza $E(G_{n+1}) - E(G_n)$. Se questa è positiva, la decisione di acquistare $n+1$ copie è più vantaggiosa di quella di acquistarne n, in termini di guadagno atteso.

$$E(G_{n+1}) - E(G_n) = v\left((n+1)\, p_{n+1} + n \sum_{h=n+2}^{\infty} p_h + \sum_{h=n+2}^{\infty} p_h - n \sum_{h=n+2}^{\infty} p_h - n\, p_{n+1}\right) - c =$$
$$= v \sum_{h=n+1}^{\infty} p_h - c = v * P(X > n) - c\ .$$

Questa differenza è positiva se e solo se $P(X > n) > \frac{c}{v}$. Il valore di $P(X > n)$ è 1 se $n = 0$, tende a 0 quando $n \longrightarrow +\infty$ e decresce all'aumentare di n; quindi esiste n_0 tale che $P(X > n_0) \le \frac{c}{v}$ e $P(X > n_0 - 1) > \frac{c}{v}$; è questo numero n_0 quello che rende massima la speranza matematica del guadagno. Come caso particolare, se succede che $P(X > n_0) = \frac{c}{v}$, allora anche la scelta di acquistare $n_0 + 1$ copie del giornale è ottimale, e d_{n_0}, d_{n_0+1} sono indifferenti.

Potevamo ottenere il risultato ain modo più semplice, con un ragionamento detto "marginalistico". Abbiamo infatti calcolato espressioni di $E(G_{n+1})$ e di $E(G_n)$ per calcolare poi la loro differenza, che era ciò che davvero serviva. Tale differenza rappresenta il "guadagno atteso marginale", ossia la variazione di guadagno atteso, legata al cambio di decisione, di acquistare non più n copie, bensì $n+1$. Il guadagno (positivo o negativo) associato alla $(n+1)$ – esima copia acquistata vale $v - c$, se la copia viene venduta, cioè se $X > n$, vale $-c$ se $X \le n$ perché in tal caso la $(n+1)$ – esima copia rimane invenduta. La speranza matematica di *questo* guadagno è

$$(v - c) * P(X > n) - c * P(X \le n) = v * P(X > n) - c * (P(X > n) + P(X \le n)) = v * P(X > n) - c$$

cosicché acquistare la $(n+1)$ – esima copia è vantaggioso se e solo se $v * P(X > n) - c > 0$, che è la stessa conclusione alla quale eravamo giunti prima.

Un modello ragionevole per la distribuzione di probabilità di X è una distribuzione di Poisson con parametro uguale al numero medio di acquirenti di quel giornale nei giorni passati. Supponiamo per esempio che il numero medio di acquirenti in ciascun giorno sia 10, cosicché avremo per $h = 0, 1, 2, \ldots$

$$p_h = P(X = h) = e^{-10} * \frac{10^h}{h!}$$

Qui sotto sono esposti alcuni valori di h (da 5 a 15, prima riga della tabella), nella seconda riga i corrispondenti valori di $p_h = P(X = h)$, nella terza riga i valori di $P(X > h)$ con cui confrontare il rapporto $\frac{c}{v}$ per stabilire il numero ottimale di copie da acquistare.

```
MatrixForm[{
  Table[k, {k, 5, 15}],
  Table[N[PDF[PoissonDistribution[10], k], 3], {k, 5, 15}],
  Table[N[1 - CDF[PoissonDistribution[10], k], 3], {k, 5, 15}]
 }]
```

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.0378	0.0631	0.0901	0.113	0.125	0.125	0.114	0.0948	0.0729	0.0521	0.0347
0.933	0.870	0.780	0.667	0.542	0.417	0.303	0.208	0.136	0.0835	0.0487

Per esempio, se $v = 1, 50$ e $c = 0, 80$ allora il rapporto è

$$r = \frac{0.80}{1.50}$$

```
0.533333
```

e allora consultando la tabella si vede che $n_0 = 10$; in questo caso n_0 è anche (insieme con 9) il valore più probabile di X; non è detto che sia sempre così. Per esempio, se $v = 4, 50$ e $c = 0, 70$ allora il rapporto è

$$r = \frac{0.70}{4.50}$$

0.155556

e allora consultando la tabella si vede che $n_0 = 13$; questo si spiega osservando che, se il margine di guadagno su ogni copia è molto ampio, allora c'è più convenienza nel rischiare di avere qualche copia invenduta; viceversa, se si restringe molto il margine di guadagno conviene rischiare di non accontentare qualche cliente, per scongiurare il rischio di copie invendute. Vediamo per esempio che cosa succede se $v = 1, 50$ e $c = 1, 20$; in questo caso il rapporto è

$$r = \frac{1.20}{1.50}$$

0.8

Questa volta il criterio del massimo guadagno atteso consiglia di acquistare $n_0 = 7$ copie del giornale.

Critiche al criterio di decisione del massimo guadagno atteso

La *speranza matematica* o *media* di una variabile aleatoria che rappresenta il valore di un guadagno incerto è l'«equivalente certo» che per primo è stato adottato per problemi di decisione in condizioni di incertezza. Tuttavia, bastano semplici esempi per rendersi conto che nella realtà non è affatto vero che un individuo razionale giudichi indifferente la scelta tra uno o più guadagni aleatori con la stessa media, oppure tra uno di questi e un guadagno certo di importo pari a tale media; ciò si osserva in misura tanto maggiore quanto più sono elevati gli importi monetari trattati. Riprendiamo il nostro esempio dell'«imprenditore edile» che deve decidere se investire in un terreno edificabile che si teme nasconda reperti archeologici, oppure investire a reddito fisso. L'investimento immobiliare offre un valore atteso di guadagno più che doppio dell'operazione monetaria; tuttavia il guadagno prodotto da quest'ultima scelta è di 100 000 € con certezza, mentre l'investimento nell'acquisto del terreno condurrà con elevata probabilità (del 60%) alla perdita di 300 000 €. Il criterio del massimo guadagno atteso suggerisce nonostante ciò di assumere questa decisione, a causa dell'ingente guadagno di 1 000 000 € che potremmo realizzare, con probabilità 40%. Tuttavia, quanti di noi seguirebbero questa prescrizione?
Il criterio del massimo guadagno atteso ha due importanti difetti:

1) Non tiene conto dell'ordine di grandezza degli importi trattati.

Molti di noi accetterebbero volentieri di partecipare a una scommessa che offre un premio di importo 3 se lanciando una moneta uscirà "testa" e impone di pagare 1 se esce "croce"; la scelta di giocare sarebbe quindi preferita a quella di non giocare. Infatti la speranza matematica della vincita, se si partecipa alla scommessa, è uguale a $\frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2} * (-1) = 1$ mentre la speranza matematica in caso di rinuncia è naturalmente uguale a 0, che in questo caso è un valore certo. È del tutto ragionevole accettare la scommessa, se gli importi trattati sono espressi in €; il rischio di perdere 1€ è compensato dalla speranza di vincerne 3. Ma se ci spiegano che i numeri 1 e 3 esprimono *centinaia* di €, molti di coloro che prima erano intenzionati a giocare tornerebbero sulla loro decisione, perché la possibilità di perdere 100€ con probabilità del 50% rende il gioco poco desiderabile nonostante la speranza matematica positiva. (Tutt'altra cosa, se ci venisse offerto di giocare 100€ a questo gioco, ripetendo per 100 volte la giocata di 1€ per volta; ma questa è un'altra faccenda).

2) Non tiene conto della propensione o avversione individuale per il rischio.

Il criterio del massimo guadagno atteso non lascia alcuna possibilità di adeguare il criterio di scelta all'individuo interessato, il quale invece ha disponibilità di denaro e propensione al rischio proprie, diverse da quelle di qualcun altro. Daniel Bernoulli,in una sua celebre pubblicazione del 1738 sulla quale ritorneremo tra poco, propone il seguente esempio:

"A una persona povera viene regalato il biglietto di una lotteria con il quale egli ha probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere 20 000 ducati (e la stessa probabilità di non vincere nulla). Si può ritenere che costui si

comporti in modo irrazionale se accetta di cedere il biglietto a una persona che gli offre 9000 ducati?"

Il valore atteso del premio della lotteria è 10 000 ducati, quindi il criterio classico suggerirebbe di *non* cedere il biglietto per un importo inferiore; tuttavia è chiaro che per un individuo in stato di necessità la disponibilità certa di un importo comunque non trascurabile è preferibile a un'alternativa che con elevata probabilità lo lascerà senza nulla.

Il "Paradosso di San Pietroburgo" (Daniel Bernoulli 1738)

Nel 1738 Daniel Bernoulli pubblicò sulla rivista scientifica *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (di San Pietroburgo) un articolo nel quale presentava alcuni problemi di Teoria delle decisioni, proponendone una soluzione; uno di questi era stato inventato dal cugino di Daniel, Nicolas Bernoulli, che per primo lo enunciò in una lettera a Pierre Rémond de Montmort fin dal 9 settembre 1713. La questione appassionò i matematici dell'epoca, fra gli altri, Gabriel Cramer, che nel 1728 pubblicò una sua proposta di soluzione.

Il problema è il seguente:

In un gioco d'azzardo, il giocatore paga una tariffa fissa *A* e gioca lanciando ripetutamente una moneta, fino a quando la *testa* appare per la prima volta. Se ciò accade al lancio *n*-esimo, egli riceve un premio di 2^n € (abbiamo per comodità adottato la valuta moderna). Per esempio, la sequenza (CCCT) dà diritto a un premio di 16€. Si vuole stabilire quale sia la *"tariffa equa"* per partecipare al gioco, ossia l'importo certo *A* che un individuo razionale giudica indifferente rispetto alla partecipazione al gioco.

Secondo l'approccio classico, la tariffa equa sarebbe la speranza matematica del premio che il giocatore vincerà. Questo è una variabile aleatoria *X* che può assumere i seguenti valori:

$$\begin{array}{lcccccccc} \textit{Valori di } X & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & \ldots & 2^n & \ldots \\ \textit{Probabilità} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \ldots & \frac{1}{2^n} & \ldots \end{array}$$

e quindi $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n * \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$. Ciò significa che in base al criterio del guadagno atteso, il gioco è da considerare *vantaggioso*, cioè giocare è consigliabile, rispetto ad astenersi dal farlo, *qualunque sia* l'importo che il "banco" chiede per partecipare. Tuttavia la probabilità che la *testa* appaia per la prima volta entro i primi 5 lanci, dando diritto a un premio ≤ 32 € è

```
1. - 1 / 2^5
0.96875
```

Nessun individuo ragionevole accetterebbe di partecipare a questo gioco per una tariffa superiore a qualche decina di €; l'aspetto "paradossale" dell'esempio è proprio questo, dal momento che si vuole sviluppare una teoria che abbia na ricaduta pratica nel suggerire comportamenti razionali. Nasce l'idea di assergnare un valore al premio non più nella misura del suo importo monetario, bensì valutando l'incremento di "utilità" che ne trae colui che ne beneficia. Daniele Bernoulli osserva che:

"La determinazione del valore di un oggetto deve essere basata non sul suo prezzo, ma piuttosto sulla utilità che può procurare... Non c'è dubbio che un guadagno di mille ducati ha più valore per un povero che per un ricco, nonostante entrambi guadagnino la stessa quantità".

Già qualche anno prima (1728) Gabriel Cramer aveva commentato:

"I matematici stimano il denaro in proporzione alla sua quantità, mentre un uomo di buon senso lo stima in proporzione all'uso che può farne."

La soluzione che D.Bernoulli propone consiste nel definire una *funzione utilità* che misura in modo non lineare il beneficio che un individuo ricava dal possesso di un patrimonio, l'*utilità* del patrimonio, appunto. Bernoulli argomenta che, se $u(x)$ rappresenta l'utilità del patrimonio x, una "piccola" variazione Δx del patrimonio produce una variazione dell'utilità che è *direttamente proporzionale* all'incremento Δx e *inversamente proporzionale* al patrimonio posseduto x, che si suppone maggiore di 0. In formula:

$$u(x+\Delta x)-u(x)=k\,\frac{\Delta x}{x}$$

con k costante positiva. Segue $\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=\frac{k}{x}$ e, per $\Delta x\to 0$, $u'(x)=\frac{k}{x}$ e quindi $u(x)=k\ln x+C$ con C costante. Siccome della funzione u interessano non tanto i valori assunti, quanto i *confronti* tra combinazioni lineari di valori di u, le costanti k e C sono irrilevanti, e non è restrittivo porre $k=1$ e $C=0$, cosicché la "funzione utilità" che Daniel Bernoulli utilizza per dare una soluzione "ragionevole" al problema proposto è

$$u(x)=\ln x.$$

Ebbene, per un individuo che possiede un patrimonio x l'utilità è $u(x)=\ln x$; se costui decide di partecipare al gioco, e la tariffa di partecipazione ammonta a f, il patrimonio del giocatore passerà da x a $Y=x-f+$(vincita). La vincita, come detto sopra, può assumere ciascuni dei valori 2^n, rispettivamente con probabilità $\frac{1}{2^n}$. La speranza matematica dell'utilità del patrimonio dopo l'esito del gioco, o *utilità attesa* è

$$E(u(Y))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}*\ln(x-f+2^n)\,.$$

Secondo questo nuovo criterio, si reputa conveniente partecipare al gioco piuttosto che astenersi, ossia scambiare il patrimonio certo x con quello aleatorio Y, se risulta

$$\ln x<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}*\ln(x-f+2^n)$$

mentre la "tariffa equa" per l'individuo con patrimonio x è f che rende $\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}*\ln(x-f+2^n)$.

Ebbene, la risoluzione numerica di questa equazione per qlcuni valori di x dà risultati abbastanza ragionevoli: ecco qualche esempio.

```
x = 1000; FindRoot[Log[x] == Sum[1/2^n * Log[x - f + 2^n], {n, 1, ∞}], {f, 30}]
```

```
{f → 10.9538}
```

```
x = 100 000; FindRoot[Log[x] == Sum[1/2^n * Log[x - f + 2^n], {n, 1, ∞}], {f, 30}]
```

```
{f → 17.556}
```

```
x = 100 000 000; FindRoot[Log[x] == Sum[1/2^n * Log[x - f + 2^n], {n, 1, ∞}], {f, 30}]
```

```
{f → 27.1848}
```

La funzione utilità "logaritmica" qui applicata è un significativo passo avanti nell'analisi di problemi di questo tipo; non è tuttavia risolutiva in modo definitivo; il "paradosso" descritto all'inizio per il criterio del guadagno atteso riappare anche applicando l'utilità logaritmica, se l'incremento dell'importo dei premi promessi è opportunamente rapido: per esempio, in questo modo, con le stesse regole del gioco descritte all'inizio

Valori del premio	$2^{(2^1)}$	$2^{(2^2)}$	$2^{(2^3)}$	$2^{(2^4)}$	…	$2^{(2^n)}$	…
Probabilità	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

l'utilità attesa è infinita, quindi ancora incontriamo il medesimo paradosso.
L'aspetto discutibile dell'idea di Bernoulli risiede nel postulare che l'incremento di utilità sia proprio

direttamente proporzionale all'incremento Δx e *inversamente proporzionale* al patrimonio posseduto *x.* La prima proprietà si può ragionevolmente attenuare richiedendo che l'utilità deve essere funzione *crescente* dell'importo monetario a cui si applica: "più denaro" deve in ogni caso risultare preferibile a "meno denaro". La seconda proprietà (proporzionalità inversa dell'incremento di utilità rispetto al patrimonio) traduce in modo troppo rigido la ragionevole idea che un medesimo guadagno dà maggiore beneficio a un "povero" che non a un "ricco". L'interpretazione di questo principio dice che il tasso di crescita della funzione utilità (cioè la sua derivata) deve essere *decrescente* al crescere di *x*, ma non necessariamente che questa derivata deve essere proporzionale a $\frac{1}{x}$; è sufficiente supporre che la funzione *u* sia *concava.*

Questi requisiti sono soddisfatti dalla funzione proposta da Gabriel Cramer per gestire il problema proposto da Nicolas Bernoulli: $u(x) = \sqrt{x}$ è una funzione crescente e convessa.

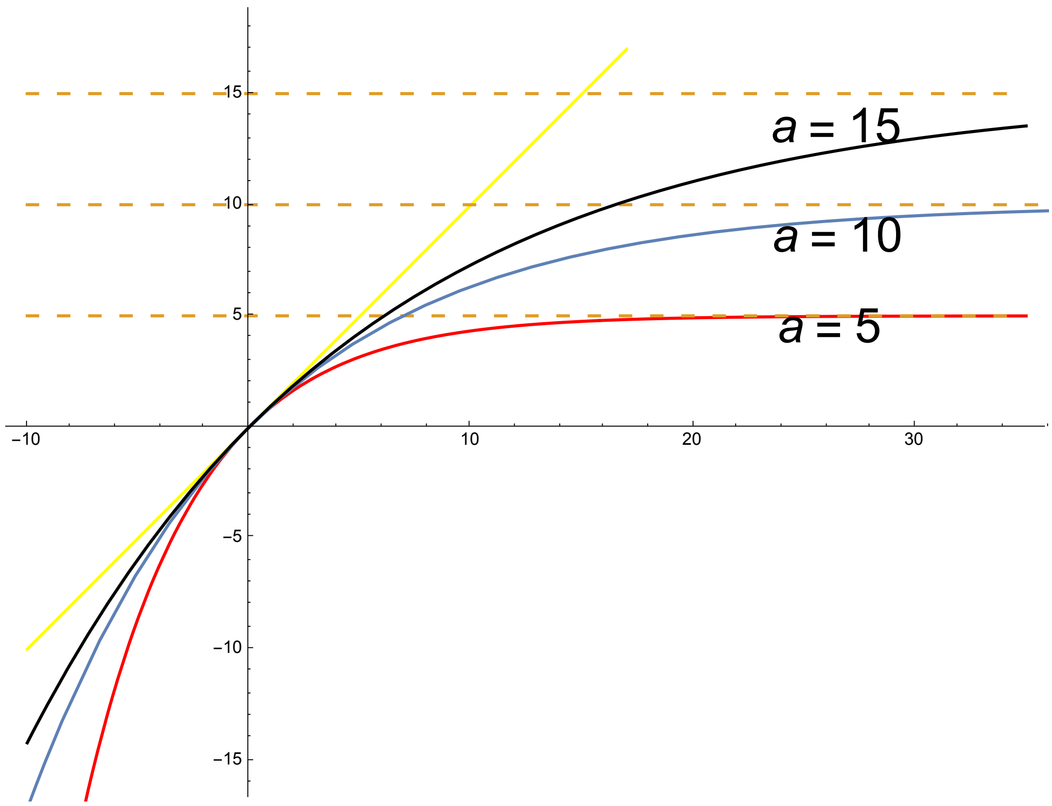
Infine, se si vuole escludere ogni tipo di paradosso legato a lotterie con utilità attesa *infinita* del premio promesso, bisogna che la funzione utlità sia *superiormente limitata.* Anche questo requisito è ragionevole; esso interpreta la condivisibile idea che per una persona veramente molto ricca, un incremento anche notevole del patrimonio non aumenta in modo significativo il suo benessere.

Una classe di funzioni che possiedono tutte queste caratteristiche sono quelle della forma

$$u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{a}} \quad \text{oppure} \quad u(x) = a * \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

con *a* parametro positivo, indicatore della propensione al rischio dell'individuo che adotta quella funzione. Precisamente, la propensione al rischio è tanto maggiore quanto più *a* è grande. Il fattore *a* nella seconda versione dell'espressione di *u*(*x*) è inutile, nelle applicazioni non occorre usarlo: si devono infatti *confrontare tra loro* dei valori di *u*, e un fattore positivo esterno non muta le disuguaglianze; aiuta però nei grafici a comprendere il significato di *a.*

```
f[a_, x_] := a * (1 - e^(-x/a));
aa = Plot[{f[5, x], 5}, {x, -10, 35}, PlotRange → All,
   PlotStyle → {{Red}, {Dashing[{.01, .02}]}}];
ab = Plot[{f[10, x], 10}, {x, -10, 70}, PlotRange → All,
   PlotStyle → {{}, {Dashing[{.01, .02}]}}];
ac = Plot[{f[15, x], 15}, {x, -10, 35}, PlotRange → All,
   PlotStyle → {{Black}, {Dashing[{.01, .02}]}}];
ad = Plot[x, {x, -10, 17}, PlotStyle → {{Yellow}}];
Show[ad, aa, ab, ac, AspectRatio → Automatic, PlotRange → {{-10, 35}, {-15, 17}}]
```



Come si nota osservando la figura, aumentando a il grafico di u rimane più a lungo vicino alla retta $y = x$, tangente al grafico nell'origine; vale a dire che l'utilità di un guadagno (o di una perdita, per valori negativi) viene valutata con un numero molto vicino all'esatto importo monetario. Se a è più piccolo la curva si allontana più in fretta dalla bisettrice, associando a valori di x positivi e abbastanza grandi, utilità molto inferiori al valore di x, mentre i valori negativi di x (perdite) danno luogo a utilità negative sensibilmente maggiori di $|x|$ in valore assoluto; queste caratteristiche dicono che un individuo che adotta un piccolo valore di a non dà eccessiva importanza a guadagni particolarmente elevati, è invece molto attento a non realizzare perdite consistenti, mostra cioè una elevata avversione al rischio.
Questa proprietà qualitativa delle $u(x)$ corrispondente ai valori di a si manifesta anche scrivendo lo sviluppo di Taylor per u con punto iniziale 0, il quale approssima $u(x)$ per x vicino a 0; questo è (per $u(x) = a * \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$)

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2a}$$

che manifesta chiaramente come valori di a più piccoli rendono la curva più distante da $y = x$ rispetto a valori maggiori.
Se gli importi monetari trattati sono ***minori di*** a, il polinomio scritto sopra può a sua volta essere adottato come funzione utilità, detta *utilità quadratica*, perché mantiene le caratteristiche di crescenza e concavità, e il significato di a continua a essere quello spiegato sopra. L'utilità quadratica con parametro a non è utilizzabile per $x > a$ perché nell'intervallo $[a.+\infty[$ è una funzione decrescente.
Per valori di x vicini a 0 rispetto all'ordine di grandezza di a, l'utilità quadratica è una buona approssimazione di quella esponenziale; la semplicità della sua espressione ne rende conveniente l'uso per certe applicazioni in cui si riesce a svolgere esplicitamente interessanti valutazioni, come mostreremo in alcuni esempi qui di seguito.
Riprendiamo un esempio che già trattato in precedenza, con applicazione in quel caso del criterio del massimo guadagno atteso.

Esempio (l'imprenditore edile, seconda puntata). Un imprenditore dispone di 1 milione di €, che può decidere di investire in un prodotto finanziario che tra due anni gli restituirà il capitale, più un interesse del 10%. In alternativa, può acquistare un terreno fabbricabile e costruire su di esso. In tal caso esiste esiste la possibilià che all'inizio dei lavori si trovino reperti archeologici; la probabilità di questo evento è valutata in 0,6. Se ciò accade, i lavori andranno assai ridimensionati, e l'imprenditore potrà fra due anni realizzare soltanto 0,7 milioni rivendendo il terreno, con una perdita di 0,3 milioni; altrimenti il ricavo sarà di 2 milioni. Stabilire quale scelta conviene all'imprenditore, secondo il criterio della massima utilità attesa, adottando come funzione utilità $u(x) = a * \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$, con valori di a uguali a 1; 1,5; 2; 4; 100.

Soluzione. La tabella da compilare deve contenere nella riga finale non più le medie $E(X_1)$, $E(X_2)$ dei guadagni aleatori (in realtà qui X_1 ha un valore certo) associati alle decisioni d_1 (investimento finanziario) e d_2 (investimento immobiliare), bensì le medie $E(u(X_1))$, $E(u(X_2))$ non più dei valori di X_1, X_2, ma invece dei corrispondenti valori di $u(x)$. Per esempio, in corrispondenza di d_2 dovremo calcolare$E(u(X_2)) = 0.6 * a * \left(1 - e^{-\frac{-0.3}{a}}\right) + 0.4 * a * \left(1 - e^{-\frac{1}{a}}\right)$

$$E(u(X_2)) = 0.6 * u(-0.3) + 0.4 * u(1) = 0.6 * a * \left(1 - e^{-\frac{-0.3}{a}}\right) + 0.4 * a * \left(1 - e^{-\frac{1}{a}}\right)$$

per ciascuno dei valori di a indicati. I risultati sono riassunti nella seguente tabella.

	d1	d2	probabilità
E	0,1	-0,3	0,6
non E	0,1	1	0,4
Medie	0,1	0,22	
Utilità attese se *a* vale:			
1	0,09516	0,04293	
1,5	0,09674	0,09269	
2	0,09754	0,12057	
4	0,09876	0,16700	
100	0,09995	0,21774	

Ebbene, l'utilizzo di una funzione utilità cambia in certi casi la decisione. Il criterio del massimo guadagno atteso (le medie sono ancora presenti in tabella) consigliava d_2, nonostante il forte rischio di perdita, perché il guadagno in caso di evento favorevole (non E) è assai elevato. L'applicazione della funzione utilità ridimensiona il peso del possibile elevato guadagno, viceversa accentua il peso della possibile perdita; questi effetti appaiono in modo tanto più marcato quanto più a è piccolo. Vediamo infatti che per $a = 1$ l'utilità attesa è sensibilmente maggiore scegliendo d_1 anziché d_2; d_1 rimane preferibile anche per $a = 1.5$, ma con un margine inferiore; per $a = 2$ o valori maggiori ritorna ad apparire preferibile d_1. Abbiamo applicato le espressioni di $u(x)$ con il fattore esterno a, per avere l'equivalenza asintotica $u(x) \sim x$ per $x \longrightarrow 0$, in modo da interpretare più facilmente il confronto tra i guadagni attesi e le utilità attese. In particolare si nota che per $a = 100$, molto più grande degli importi trattati nel problema, le utilità attese hanno valori molto vicini alle speranze matematiche dei guadagni, vale a dire che il ridimensionamento verso il basso dei guadagni e verso l'alto delle perdite è quasi irrilevante.

Se avessimo usato l'espressione $u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{a}}$, senza il fattore esterno a, avremmo ottenuto in tabella valori diversi; per esempio nella riga corrispondente ad $a = 4$ i valori delle utilità attese sarebbero stati $\frac{1}{4}$ di quelli riportati nella riga corrispondente della tabella; questo non avrebbe cambiato nulla riguardo alla decisione "consigliata", perché la disuguaglianza tra i due valori si sarebbe mantenuta nello stesso verso.

Utilità di un guadagno aleatorio X in funzione della sua media e della sua varianza

Vogliamo qui approfondire in quale modo l'utilizzo di una funzione utilità modifica l'atteggiamento di un individuo nella decisione tra operazioni finanziarie il cui risultato è un guadagno aleatorio X, più o meno elevato in media, più o meno variabile nei valori che potrà assumere. Il calcolo riesce più facilmente utilizzando una formula di utilità "quadratica"

$$u(x) = x - \frac{x^2}{2a}$$

con a costante positiva, e con tutti gli importi monetari trattati, che diventeranno valori di x, non superiori ad a. Utilizzeremo perciò questo tipo di funzione utilità; i risultati che otterremo rimangono comunque qualitativamente validi anche se si adotta una diversa funzione utilità.
Ancora, per semplicità pensiamo a X come a una variabile discreta, che può assumere i valori

Valori di X	x_1	x_2	…	x_n
Probabilità	p_1	p_2	…	p_n

ma i risultati non cambiano nella sostanza se si considera una variabile X assolutamente continua, ossia descritta attraverso una funzione *densità di probabilità*. Indichiamo con m la *media* di X, $m = E(X)$, con σ^2 la *varianza* di X, $\sigma^2 = \text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Ebbene, in base alle scelte operate abbiamo

$$E(u(X)) = \sum_{k=1}^{n} p_k * u(x_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k * \left(x_k - \frac{x_k^2}{2a}\right) = \sum_{k=1}^{n} p_k * x_k - \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^{n} p_k * x_k^2 =$$
$$= m - \frac{1}{2a} E(X^2) = m - \frac{1}{2a}(m^2 + \sigma^2) = u(m) - \frac{1}{2a}\sigma^2$$

Questo calcolo esprime l'utilità attesa come l'utilità del guadagno medio, diminuita della quantità $\frac{1}{2a}\sigma^2$. Se ne deducono le seguenti conseguenze, del tutto ragionevoli:

• a parità di guadagno ateso (m) è preferibile la scelta che presenta minore variabilità; la scelta migliore in assoluto è quella che offre il guadagno certo m con varianza nulla.

• la formula ottenuta, $E(u(X)) = u(m) - \frac{1}{2a}\sigma^2$, manifesta il significato di a come "misura dell propensione al rischio": la diminuzione di utilità attesa dovuta alla varianza del prodotto finanziario è tanto più marcata quanto più a è piccolo.

Esempio. Diversificazione di investimenti.

La formula $E(u(X)) = u(m) - \frac{1}{2a}\sigma^2$, ottenuta applicando la "utilità quadratica", mette in evidenza l'opportunità di agire in modo da mantenere una buona speranza matematica di guadagno, ma nello stesso tempo una varianza piccola. Questo obiettivo viene conseguito mediante una *diversificazione degli investimenti.*
Supponiamo qui di avere la disponibilità di 20 000 € che desideriamo investire. Ci vengono proposti due prodotti finanziari, ciascuno dei quali richiede l'investimento di 10 000 € o multipli; entrambi hanno la durata di due anni, al termine dei quali produrranno, per ogni quota da 10 000 €, un guadagno aleatorio di importo X, per il primo; Y, per il secondo; come al solito s'intende che X e Y possano eventualmente essere negativi, e in questo caso l'investimento avrebbe dato luogo a una perdita.
Si sa che X e Y hanno entrambi media $m > 0$ e varianza σ^2, anch'essa uguale per i due prodotti, e inoltre si suppone che X, Y siano indipendenti. Ebbene, nonostante che le previsioni di guadagno e l'incertezza sul suo importo siano uguali per i due prodotti, conviene acquistare una quota di X e una di Y piuttosto che due quote di uno solo dei due.
Infatti, operando la diversificazione si acquista il guadagno aleatorio $X + Y$, la cui media è $2m$ e la varianza è

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \ \ (\text{in virtù dell'indipendenza di } X \text{ e } Y) \ = 2\sigma^2$$

quindi $E(u(X + Y)) = u(2m) - \frac{1}{2a} * 2\sigma^2$. Invece, se sottoscriviamo una quota doppia del primo prodotto (o del secondo, non c'è differenza), il guadagno aleatorio è $2X$, il quale ha valore atteso $2m$ come $X+Y$, ma varianza

$$\text{var}(2X) = 2^2 * \text{var}(X) = 4\,\sigma^2$$

quindi $E(u(2X)) = u(2m) - \frac{1}{2a} * 4\,\sigma^2$, inferiore al valore ottenuto con l'investimento diversificato.
Questo effetto è tanto più accentuato quanto più ampia è la diversificazione: se l'importo da investire ammonta a 30 000 €, e abbiamo tre prodotti indipendenti da 10 000 € ciascuno, con guadagni aleatori X, Y, Z, tutti con media $m > 0$ e varianza σ^2, la diversificazione ra i tre prodotti darà un'utilità attesa

$$E(u(X+Y+Z)) = u(3m) - \frac{1}{2a} * 3\,\sigma^2$$

mentre investendo in una tripla quota di X avremo un'utilità attesa

$$E(u(3X)) = u(3m) - \frac{1}{2a} * 9\,\sigma^2$$

E così via. Più indietro, abbiamo fatto un esempio di una scommessa che ci offre un premio di importo 3 se lanciando una moneta uscirà “testa” e ci impone di pagare 1 se esce “croce” (speranza matematica uguale a 1), giudicando questa scelta preferibile a “non giocare” (speranza matematica di guadagno pari a 0, che in questo caso è un valore certo). La scommessa è sicuramente conveniente se gli importi trattati sono espressi in €; il rischio di perdere 1€ è compensato dalla speranza di vincerne 3. Ma, dicevamo allora se ci spiegano che i numeri 1 e 3 esprimono *centinaia* di €, molti di coloro che prima erano intenzionati a giocare tornerebbero sulla loro decisione per non rischiare di perdere una somma non del tutto trascurabile. Se invece ci viene chiesto ancora di rischiare 100 € in questo gioco, ma non con un singolo lancio bensì effettuando per 100 volte la giocata da 1 €, l'invito è certamente da accogliere. Indicato con X il guadagno atteso in ciascuna scommessa (di 1€ contro 3€), si ha $m = E(X) = \frac{1}{2} * (-1) + \frac{1}{2} * 3 = 1$, $E(X^2) = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 9 = 5$, quindi $\text{var}(X) = 9 - 1 = 8$.
Giocare per 100 volte a questo gioco significa assicurarsi un guadagno aleatorio $X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ dove $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ sono variabili equidistribuite a X e indipendenti. L'utilità attesa, calcolata mediante $u(x) = x - \frac{x^2}{2a}$, ha il valore

$$u(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}) = u(100 * 1) - \frac{1}{2a} * 100 * 8 = 100 - \frac{10\,800}{2a}$$

La scelta di partecipare alle 100 scommesse è preferibile alla scelta di non giocare: l'utilità attesa è infatti sicuramente positiva, per tutti i valori ammissibili per a; a deve infatti essere > 100 perchè si deve calcolare $u(100)$, e l'utilità quadratica è applicabile soltanto a importi inferiori ad a.
Comunque, in questo caso la convenienza di partecipare al gioco è chiara. Se Y è il numero di vincite in 100 scommesse, la distribuzione di probabilità di Y è binomiale $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$; il guadagno netto dopo le 100 scommesse ammonta a $3Y - (100 - Y) = 4Y - 100$; affinché questo sia positivo basta che si abbia $Y > 25$. La probabilità che ciò *non* accada, ossia risulti $Y \leq 25$ è la funzione ripartizione della distribuzione binomiale $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ calcolata in 25:

```
CDF[BinomialDistribution[100, 0.5], 25]
```

2.81814×10^{-7}

Praticamente impossibile!

Esempio. A quali condizioni conviene a una Compagnia assicuratrice accettare un contratto di assicurazione?

Consideriamo il più semplice contratto di copertura assicurativa: la Compagnia pagherà all'assicurato l'importo S se entro un tempo stabilito (per esempio, un anno) avverrà l'evento coperto dall'assicurazione (per esempio: la perdita dell'automobile dell'assicurato a causa di furto o incendio), e nulla in caso contrario. La Compagnia conosce, in base a dati statistici, qual è la probabilità dell'evento; sia p. Tipicamente, p è un numero molto vicino a zero, nella scala da 0 a 1. Per garantire la copertura, la Compagnia chiede al contraente un importo r, detto *premio di assicurazione.* Si vuole stabilire quale valore del premio r rende conveniente per la Compagnia sottoscrivere il contratto, in funzione di S, p e del parametro a di "propensione al rischio" della Compagnia, se valutiamo i guadagni attraverso la funzione utilità quadratica $u(x) = x - \frac{x^2}{2a}$.

Soluzione. Il guadagno (positivo o negativo) che la Compagnia otterrà dal contratto sopra descritto è una variabile aleatoria X che può assumere i seguenti valori:

$$\begin{array}{ccc} Valori\ di\ X & r & r-S \\ probabilità & 1-p & p \end{array}$$

Calcoliamo innanzitutto la *speranza matematica* di X. Questa vale

$$(1-p)*r + p*(r-S) = r - p*S$$

Se come criterio di decisione si adotta il *guadagno atteso*, cioè la speranza matematica del guadagno, conviene alla Compagnia stipulare il contratto se $r - p*S > 0$, cioè se il premio di assicurazione è uguale alla speranza matematica dell'importo che la Compagnia dovrà pagare all'assicurato; è il classico criterio di "gioco equo" oppure sbilanciato a favore di uno dei due partecipanti.
In realtà il premio r richiesto è sempre molto maggiore di $p*S$, perché la Compagnia deve sostenere spese per tasse, personale ecc., ed opera a scopo di lucro, deve quindi garantirsi un margine di guadagno. Il premio richiesto al contraente non sarà sicuramente $p*S$, bensì $k*S$ con $k > p$. La differenza $\gamma = k - p$ si chiama *caricamento unitario.* "Unitario" perché rappresenta la maggiorazione dl premio richiesto per ciascun Euro della somma S assicurata; per esempio se $S = 5000$ €, il contraente pagherà rispetto al "premio equo" $5000*p$ una maggiorazione pari a $5000*\gamma$, quindi appunto, la maggiorazione di premio ammonta a γ Euro per ogni € assicurato.

Il risultato economico per la Compagnia, in caso di accettazione del contratto, ossia il suo "guadagno", negativo in caso si tratti di perdita, è la variabile aleatoria Y così descritta:

$$\begin{array}{ccc} Valori\ di\ Y & k\,S & k\,S-S \\ probabilità & 1-p & p \end{array}$$

Calcoliamo l'utilità attesa di Y con la funzione utilità $u(x) = x - \frac{x^2}{2a}$.

$$\begin{aligned} E(u(Y)) &= (1-p)*\left(k\,S - \tfrac{1}{2a}k^2\,S^2\right) + p*\left(k\,S - S - \tfrac{1}{2a}(k\,S - S)^2\right) = \\ &= k\,S - p\,S - \tfrac{1}{2a}\left(k^2\,S^2 - p\,k^2\,S^2 + p\,k^2\,S^2 + p\,S^2 - 2\,k\,p\,S^2\right) = \\ &= \gamma\,S - \tfrac{S^2}{2a}\left(k^2 - 2\,k\,p + p^2 - p^2 + p\right) = \gamma\,S - \tfrac{S^2}{2a}\left(\gamma^2 + p - p^2\right) \end{aligned}$$

(nell'ultima riga abbiamo addizionato e sottratto p^2 per ottenere $(k-p)^2$, cioè γ^2).

Semplificando il fattore positivo S, concludiamo che

$$E(u(Y)) > 0 \Longleftrightarrow \gamma - \frac{S}{2a}\left(\gamma^2 + p - p^2\right) > 0$$

Per elaborare più efficacemente il risultato conviene fare un'approssimazione. Normalmente p ha un valore molto prossimo a 0, nella scala tra 0 e 1; k (e conseguentemente γ) può anche essere sensibilmente maggiore di p, ma sempre mantenendosi vicino a 0, per esempio $p = 10^{-3}$, $\gamma = 2*10^{-3}$; allora γ^2 e p^2 si possono trascurare rispetto a p, e la disuguaglianza scritta qui sopra è approssimativamente equivalente a

$$\gamma - \frac{p\,S}{2a} > 0$$

ovvero, in forma diversa,

$$S < \frac{2\,a\,\gamma}{p} \text{ oppure, equivalentemente, } \gamma > \frac{p\,S}{2a} \text{ ovvero } \frac{\gamma}{p} > \frac{S}{2a}$$

La prima disuguaglianza, $S < \frac{2\,a\,\gamma}{p}$, stabilisce un limite all'importo massimo che la compagnia è disposta ad assicurare, quando sia fissato il caricamento unitario γ. Per esempio, con $p = 10^{-3}$,

$\gamma = 10^{-2}$, $a = 10^5$ avremmo $S < \frac{2*10^5*10^{-2}}{10^{-3}} = 2*10^6$; ciò significa che, nonostante il premio richiesto sia undici volte maggiore del valore "equo" in senso classico, la Compagnia non ritiene conveniente sottoscrivere un contratto che integra il rischio, per la Compagnia stessa, di dover pagare un risarcimento superiore a 2 milioni di Euro.
Le altre due disuguaglianze scritte sopra, ovviamente equivalenti alla prima mostrano (in particolare la $\frac{\gamma}{p} > \frac{S}{2a}$) che il caricamento unitario deve aumentare, *relativamente a p*, quanto più è grande l'importo assicurato. Ad esempio, supponiamo per semplicità che sia $p = 10^{-3}$ la probabilità di perdita, in un anno, per furto o incendio, sia di un'auto del valore di 40 000 €, sia di un piccolo aereo del valore di 40 000 000 €. Il premio richiesto per assicurare l'auto dovrà essere calcolato con un caricamento unitario $\gamma > \frac{10^{-3}*4*10^4}{2*10^5} = 2*10^{-4}$, quindi $k > 2*10^{-4} + 10^{-3} = 12*10^{-4}$, vale a dire che il premio richiesto dovrà essere maggiore di $12*10^{-4}*4*10^4 = 48$ €; per assicurare l'aereo invece bisogna che sia $\gamma > \frac{10^{-3}*4*10^7}{2*10^5} = 2*10^{-1}$ quindi $k > 2*10^{-1} + 10^{-3} = 201*10^{-3}$, e quindi il premio richiesto al proprietario dell'aereo dovrà essere maggiore di $201*10^{-3}*4*10^7 = 8\,040\,000$ €, molto di più di mille volte l'importo di riferimento per l'auto, il cui valore è un millesimo di quello dell'aereo.

Esempio. A quali condizioni conviene a un individuo sottoscrivere una polizza assicurativa sulla perdita di un bene di sua proprietà?

Si tratta dello stesso problema visto sopra, qui però dal punto di vista del potenziale cliente della Compagnia, mentre prima il punto di vista era quello della Compagnia. Chiaramente, il (potenziale) assicurato e la Compagnia sono parti avverse nella trattazione del problema: la convenienza della Compagnia sussiste per premi *non inferiori* a una certa soglia, quella cel cliente per premi *non superiori* a una certa altra soglia; vediamo se c'è un intervallo entro il quale la sottoscrizione del contratto risulta (secondo questo criterio di scelta) convenente per entrambe le parti.

Manteniamo le notazioni introdotte sopra: S è l'importo assicurato, che la Compagnia pagherà al cliente se avverrà l'evento E oggetto dell'assicurazione, per esempio se l'auto del cliente è distrutta da un incendio entro un anno dalla stipula del contratto. La probabilità dell'evento è nota, e vale p; il premio che la Compagnia chiede all'assicurato è $k\,S$ con $k > p$; $\gamma = k - p$ indica come prima il *caricamento unitario.*
Il cliente deve assumere una delle due decisioni: d_1 (non assicurarsi); d_2 (assicurarsi). I guadagni (in questo caso sempre ≤ 0) corrispondenti a ciascuna delle due decisioni e al fatto che E si verifichi oppure no, sono sintetizzati nella seguente tabella

decisioni / *eventi*	d_1	d_2	*probabilità*
E	$-S$	$-k\,S$	p
non E	0	$-k\,S$	$1-p$

Infatti, se la decisione è d_1 (non assicurarsi), l'automobilista subirà una perdita di S in caso di E (l'auto brucia), perché dovrà ricomperarla a proprie spese; nessuna perdita se l'auto non brucia. Se invece sceglie d_2, cioè si assicura, perderà in ogni caso $k\,S$, perché anche se l'auto brucerà, l'ulteriore spesa di importo S per il riacquisto dell'auto sarà rimborsata dalla Compagnia.

Calcoliamo anche per il potenziale assicurato l'utilità con la funzione quadratica $u(x) = x - \frac{x^2}{2a}$.
L'*utilità attesa* in caso di d_1 è

$$E(u(X_1)) = p*u(-S) + (1-p)*u(0) = p*u(-S) = p*\left(-S - \frac{S^2}{2a}\right) = -p\,S\left(1 + \frac{S}{2a}\right)$$

L'*utilità attesa* in caso di d_2 è invece

$$E(u(X_2)) = u(-k\,S) = -k\,S - \frac{k^2\,S^2}{2a} = -k\,S\left(1 + \frac{k\,S}{2a}\right)$$

Conviene sottoscrivere l'assicurazione se $E(u(X_2)) > E(u(X_1))$. La differenza è:

$$E(u(X_2)) - E(u(X_1)) = (p-k)\,S + \frac{S^2}{2\,a}\left(p-k^2\right) \approx (p-k)\,S + \frac{p\,S^2}{2\,a} = \frac{p\,S^2}{2\,a} - \gamma\,S$$

L'approssimazione di $\left(p-k^2\right)$ con p è motivata come nell'esempio precedente, dal fatto che sia p, sia γ sono vicini a 0 e i loro ordini di grandezza sono uguali o comunque vicini, cosicché k^2 è trascurabile rispetto a p.

Dunque l'assicurazione conviene per il cliente se $\gamma\,S < \frac{p\,S^2}{2\,a}$, cioè

$$\gamma - \frac{p\,S}{2\,a} < 0$$

La disuguaglianza appare esattamente come quella ottenuta "dal punto di vista della Compagnia", ma con il verso opposto. Sembra che non ci sia alcuna possibilità di conciliare le esigenze della Compagnia e del potenziale cliente. Non è così, in realtà. Il valore di a, associato alla "propensione al rischio" nella funzione utilità *non è lo stesso* per i due attori (Compagnia e automobilista); la Compagnia ha certamente una riserva di capitale considerevole, e limita molto il rischio effettivo mediante la diversificazione dei suoi investimenti, quindi può permettersi di valutare le utilità dei suoi guadagni con un parametro molto maggiore di quello applicato a sé stesso dall'automobilista; siano A il parametro dell'assicuratore, $a < A$ quello dell'automobilista. Allora i valori γ del caricamento unitario favorevoli alla sottoscrizione del contratto assicurativo da parte di entrambi gli attori coinvolti sono quelli per cui è

$$\frac{p\,S}{2\,A} < \gamma < \frac{p\,S}{2\,a}$$

Nota. Perché l'assunzione di un contratto di polizza può essere considerato un "investimento" da parte della Compagnia?

Normalmente, si pensa a un investimento (con esito incerto) un'operazione finanziaria in cui l'investitore cede una somma certa di denaro, e a scadenza, cioè in un tempo prestabilito, riceve un importo aleatorio; la differenza tra quest'ultimo importo e il primo costituisce il guadagno relativo all'investimento. Il contratto assicurativo sembra non rientrare in questa fattispecie, perché la Compagnia non cede alcun importo, anzi, *riceve* il premio assicurativo ($k\,S$, nel nostro esempio), e a scadenza dovrà pagare S, oppure 0, se E si sarà verificato oppure no.
Possiamo però pensare che la Compagnia ceda all'assicurato l'importo $S - k\,S$ all'atto della stipula del contratto, vale a dire che riceve il premio $k\,S$, e affida in custodia al cliente l'importo assicurato S. Al termine del periodo di validità dela polizza il cliente restituirà S alla Compagnia, se E non si sarà verificato; il tal caso il guadagno della Compagnia sarà $S - (S - k\,S) = k\,S$; se E si verificherà, il cliente non restituirà nulla, e il guadagno per la Compagnia (in questo caso negativo) sarà $0 - (s - k\,S) = k\,S - S$.

Decisioni condizionate da informazioni; valore di una informazione.

Quando si affrronta un problema di decisione in condizioni di incertezza sono assegnate le probabilità $p_1, \ldots, p_m$ dei diversi eventi $E_1, \ldots, E_m$ mutuamente incompatibili ed esaustivi dell'evento certo, che condizionano il risultato economico associato a ciascuna delle decisioni $d_1, \ldots, d_n$ tra la quali l'operatore deve scegliere, in base a un criterio adottato, per esempio il massimo guadagno atteso o la massima utilità attesa, con una determinata funzione utilità.
Per semplicità espositiva qui ci riferiremo al criterio "classico" del valore atteso del guadagno.
L'impiego di una funzione utilità comporta qualche differenza, ne parleremo dopo.
Ebbene, in partenza abbiamo la consueta tabella

decisioni / *eventi*	d_1	d_2	$\cdots$	d_j	$\cdots$	d_n	*probabilità*
E_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,j}$	$\cdots$	$x_{1,n}$	p_1
E_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,j}$	$\cdots$	$x_{2,n}$	p_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
E_i	$x_{i,1}$	$x_{i,2}$	$\cdots$	$x_{i,j}$	$\cdots$	$x_{i,n}$	p_i
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
E_m	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\cdots$	$x_{m,j}$	$\cdots$	$x_{m,n}$	p_m
medie	$E(X_1)$	$E(X_2)$	$\cdots$	$E(X_j)$	$\cdots$	$E(X_n)$	

Ricordiamo che $E(X_j) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} * p_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $x_{i,j}$ è il guadagno corrispondente alla decisione d_j , se l'evento che si verificherà è E_i .

Se il criterio di decisione è il massimo guadagno atteso, la decisione che prenderemo sarà d_{j_0}, con

$$\text{guadagno atteso} = \bar{x} \equiv E(x_{j_o}) = \max\{E(X_j),\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

e $\bar{x}$ è il valore atteso del guadagno, se il criterio di decisione è quello detto sopra.

Valore della perfetta informazione.

Se l'operatore conoscesse *con certezza* quale evento accadrà, *prima* di assumere la decisione (chiameremo questa la *perfetta informazione*), egli avrebbe modo di decidere più consapevolmente, perché mancando l'incertezza egli assumerebbe la decisione che *con certezza* gli darebbe il massimo guadagno. Informato del fatto che accadrà E_i , l'operatore guarderà soltanto la riga i-esima della matrice degli $x_{i,j}$ e selezionerà il valore massimo, realizzando in questo modo il guadagno

$$\bar{x}_i = \max\{x_{i,j}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Attenzione: "conoscere quale evento accadrà" significa che l'operatore riceverà l'informazione prima di prendere la decisione, ma ***non*** che egli avrà il potere di stabilire quale degli eventi E_i si verificherà. Si presume che l'acquisizione dell'informazione abbia un costo; l'operatore avrà convenienza a farsi carico di questo costo, se l'incremento di guadagno atteso è superiore a tale costo.

Il guadagno atteso in effetti aumenta, disponendo della perfetta informazione. Infatti il guadago atteso in presenza di perfetta informazione è quello di una variabile aleatoria che vale $\bar{x}_i$ se si verifica E_i , quindi con probabilità p_i ; il valore atteso è quindi

$$\text{guadagno atteso con perfetta informazione} = \bar{\bar{x}} \equiv \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i * p_i$$

Ora, per ciascun j è $x_{i,j} \le \bar{x}_i$, quindi $E(X_j) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} * p_i \le \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i * p_i = \bar{\bar{x}}$ e conseguentemente $\bar{x} = \max\{E(X_j),\ j = 1, 2, \ldots, n\} \le \bar{\bar{x}}$

La differenza $v = \bar{\bar{x}} - \bar{x}$ è il *valore della perfetta informazione*, cioè il massimo importo che all'operatore conviene spendere per acquisire la perfetta informazione.
Mostriamo un esempio per chiarire tutto ciò

Esempio (l'imprenditore edile, terza puntata). Un imprenditore dispone di 1 milione di €, che può decidere di investire in un prodotto finanziario che tra due anni gli restituirà il capitale, più un interesse del 10%. In alternativa, può acquistare un terreno fabbricabile per costruire su di esso. La concessione edilizia per costruire è a discrezione del sindaco della città, dove sono imminenti le elezioni, con due candidati. Il candidato A, al quale si attribuisce probabilità 0,6 di essere eletto, è un "ecologista", il quale obbligherebbe l'imprenditore a un sostanziale ridimensionamento del progetto; il tal caso egli ricaverebbe soltanto 0,7 milioni, con una perdita di 0,3 milioni. L'altro candidato, sia B, concederebbe invece la completa esecuzione del progetto, con conseguente ricavo di

2 milioni, quindi guadagno di 1 milione. L'imprenditore ha la possibilità di conoscere l'esito delle elezioni prima di prendere la decisione, tramite un funzionario dell'ufficio elettorale che in cambio di una "tangente" gli comunicherà il nome del vincitore prima che la notizia sia resa pubblica. Qual è l'importo massimo della "tangente" che l'imprenditore deve essere disposto a pagare, se il suo criterio di scelta è il valore atteso del guadagno?

Soluzione. Notiamo che importi monetari e probabilità nei dati sono gli stessi delle prime due "puntate", abbiamo soltanto cambiato lo scenario, concessione edilizia anziché reperti archeologici; il problema quindi, è in realtà sempre lo stesso. Riportiamo la tabella corrispondente, in cui ora *E* indica l'evento "viene eletto sindaco il candidato *A*, contrario al progetto edilizio".

	d1	d2	probabilità
E	0,1	-0,3	0,6
non E	0,1	1	0,4
Medie	0,1	0,22	

Come dicevamo prima, l'imprenditore può essere informato in anticipo dell'esito dell'elezione, non può invece condizionare il suo esito. Nel caso attuale $\overline{x}_1 = 0.1$; $\overline{x}_2 = 1$ e quindi

$$\overline{\overline{x}} = 0.6 * 0.1 + 0.4 * 1 = 0.46$$

Invece il guadagno atteso, in mancanza di informazione, è uguale a 0.22 , come si evince dalla tabella. Il valore della perfetta informazione è dunque $v = 0.46 - 0.22 = 0.24$.

Informazione parziale e suo valore.

La perfetta informazione è in pratica difficile da ottenere. Più spesso è possibile ottenere informazioni parziali, le quali non danno la *certezza* di quale tra gli eventi $E_1, \ldots, E_m$ si verificherà, ma mutano le probabilità che si assegnano a ciascuno di essi. Per esempio, l'imprenditore di cui si parlava sopra, se vedrà sfumare la possibilità di conoscere l'esito dell'elezione, potrà fare svolgere un sondaggio tra gli elettori per conoscere le loro opinioni e avere una previsione, mai del tutto certa, di chi sarà eletto. Quando l'imprenditore assegna l'incarico al sondaggista, l'esito del sondaggio è a sua volta incognito. La "informazione parziale" è quindi una "lotteria" $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_r\}$ che potrà dare diverse risposte, rappresentate dagli H_k i quali sono eventi a due a due incompatibili, la cui unione è l'evento certo. Occorre conoscere le seguenti probabilità:

$$\varrho_k = P(H_k), \quad k = 1, 2, \ldots, r \quad (\text{quindi } \textstyle\sum_{k=1}^{r} \varrho_k = 1)$$

$$p_i^{(k)} = P(E_i \mid H_k), \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

Se l'informazione parziale esprime il risultato H_k, il guadagno atteso dovrà essere calcolato non più applicando le probabilità "a priori" p_i degli eventi E_i, bensì le proprietà condizionali $p_i^{(k)} = P(E_i \mid H_k)$; avremo cioè una speranza condizionata

$$\overline{x}^{(k)} = \max\{E(X_j \mid H_k), \ 1 \le j \le n\} = \max\left\{\textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} * p_i^{(k)}, \ 1 \le j \le n\right\}$$

Prima dell'assunzione dell'informazione sono incerti sia gli E_i, sia gli H_k, quindi il guadagno atteso, qualora si decida di acquisire l'informazione. ma *prima* di conoscerne la risposta, è la media dei valori $\overline{x}^{(k)}$, ciascuno dei quali ha probabilità di realizzarsi uguale a ϱ_k, cioè la probabilità che l'informazione dia la risposta H_k.
Perciò *il guadagno atteso, nel caso si decida di acquisire l'informazione* $\mathcal{H}$ è:

$$\overline{x}^{(\mathcal{H})} = \textstyle\sum_{k=1}^{r} \overline{x}^{(k)} * \varrho_k$$

Teorema. Disuguaglianze tra i guadagni attesi condizionati da informazioni.

Mantenendo le notazioni usate in precedenza si ha

$$\overline{x} \leq \overline{x}^{(\mathcal{H})} \leq \overline{\overline{x}}$$

cioè, il guadagno atteso in assenza di ogni ulteriore informazione è minore o uguale del guadagno atteso in presenza di una informazione parziale, e quest'ultimo è minore o uguale del guadagno atteso in presenza della perfetta informazione.

Dimostrazione. Mostriamo la prima disuguaglianza, cioè $\overline{x} \leq \overline{x}^{(\mathcal{H})}$. Scrivendo esplicitamente ciò che i simboli rappresentano, questa vuole dire

$$\max\{\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} * p_i,\ j = 1, 2, \ldots, n\} \leq \sum_{k=1}^{r} \max\left\{\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} * p_i^{(k)},\ \ 1 \leq j \leq n\right\} * \varrho_k$$

Fissiamo un intero j_1 tra 1 e *n.* Allora

$$\overline{x}^{(\mathcal{H})} = \sum_{k=1}^{r} \max\left\{\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} * p_i^{(k)},\ \ 1 \leq j \leq n\right\} * \varrho_k \geq \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,j_1} * p_i^{(k)}\right) * \varrho_k = \sum_{i=1}^{m} x_{i,j_1} * \left(\sum_{k=1}^{r} \varrho_k * p_i^{(k)}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} x_{i,j_1} * \left(\sum_{k=1}^{r} P(H_k) * P(E_i \mid H_k)\right) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,j_1} * P(E_i) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,j_1} * p_i\,.$$

Così abbiamo stabilito che per ogni j_1 tra 1 e n si ha

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j_1} * p_i \leq \overline{x}^{(\mathcal{H})}$$

e allora anche

$$\max\{\sum_{i=1}^{m} x_{i,j_1} * p_i,\ j_1 = 1, 2, \ldots, n\} \leq \overline{x}^{(\mathcal{H})} \qquad \text{cioè} \qquad \overline{x} \leq \overline{x}^{(\mathcal{H})}.$$

Ora mostriamo la seconda disuguaglianza, cioè $\overline{x}^{(\mathcal{H})} \leq \overline{\overline{x}}$. Ricordiamo che abbiamo indicato $\overline{x}_i = \max\{x_{i,j},\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, e $\overline{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i * p_i$. Dalla prima formula segue subito che, per ogni fissato i tra 1 e m, e per ogni j tra 1 e n è $x_{i,j} \leq \overline{x}_i$. Allora:

$$\overline{x}^{(\mathcal{H})} = \sum_{k=1}^{r} \max\left\{\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} * p_i^{(k)},\ \ 1 \leq j \leq n\right\} * \varrho_k \leq \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i * p_i^{(k)}\right) * \varrho_k =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i * \left(\sum_{k=1}^{r} \varrho_k * p_i^{(k)}\right) = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i * p_i = \overline{\overline{x}}$$

come volevamo dimostrare.

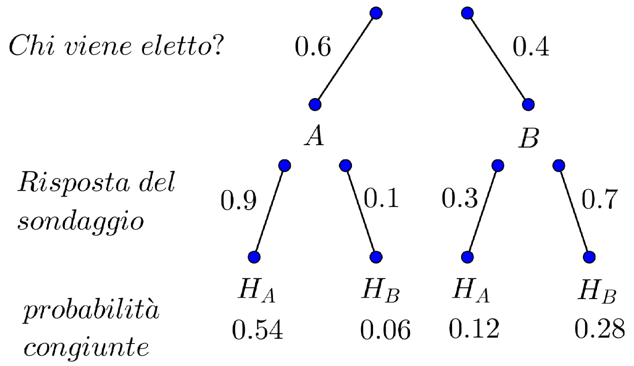
La differenza $v^{(\mathcal{H})} = \overline{x}^{(\mathcal{H})} - \overline{x}$ è il *valore dell'informazione* $\mathcal{H}$.

Esempio (l'imprenditore edile, quarta puntata). Un imprenditore dispone di 1 milione di €, che può decidere di investire in un prodotto finanziario che tra due anni gli restituirà il capitale, più un interesse del 10%. In alternativa, può acquistare un terreno fabbricabile per costruire su di esso. La concessione edilizia per costruire è a discrezione del sindaco della città, dove sono imminenti le elezioni, con due candidati. Il candidato *A*, al quale si attribuisce probabilità 0,6 di essere eletto, è un "ecologista", il quale obbligherebbe l'imprenditore a un drastico ridimensionamento del progetto; il tal caso egli ricaverà soltanto 0,7 milioni, con una perdita di 0,3 milioni. L'altro candidato, sia *B*, concederebbe invece la completa esecuzione del progetto, con conseguente ricavo di 2 milioni, quindi guadagno di 1 milione. L'imprenditore considera l'opportunità assumere un'agenzia specializzata per realizzare un sondaggio che stabilisca quale dei due candidati si preveda sarà eletto. Si sa che l'Agenzia, nelle passate esperienze, ha previsto esattamente l'esito del voto nel 90% dei casi in cui l'eletto è stato il candidato che partiva favorito, e lo ha previsto esattamente nel 70% dei casi in cui l'eletto è stato colui che partiva non favorito. Calcolare il prezzo massimo che l'imprenditore deve essere disposto a pagare per il sondaggio, secondo il criterio del valore atteso.

Soluzione. Gli eventi E_1, E_2 sono in questo caso A, B, che significano "viene eletto *A*", "viene eletto *B*"; *A* parte favorito, essendo *a priori* $P(A) = 0.6$. Il sondaggio darà una delle due risposte H_A, H_B, che significano rispettivamente la previsione di elezione di *A*, oppure di *B.* Le informazioni riguardanti l'affidabilità del'agenzia s'interpretano assumendo $P(H_A \mid A) = 0.9$, $P(H_B \mid B) = 0.7$.
Per calcolare $\overline{x}^{(\mathcal{H})}$ ci servono le seguenti probabilità:

$$\varrho_1 = P(H_A)\,,\ \ \varrho_2 = P(H_B)\,,$$
$$p_1^{(1)} = P(A \mid H_A)\,,\ \ p_2^{(1)} = P(B \mid H_A)\,,\ \ p_1^{(2)} = P(A \mid H_B)\,,\ \ p_2^{(2)} = P(B \mid H_B)$$

Queste si possono calcolare nel modo seguente:



In questo modo si vede subito che

$$\varrho_1 = P(H_A) = 0.54 + 0.12 = 0.66\,,\quad \varrho_2 = P(H_B) = 0.06 + 0.28 = 0.34\,.$$

Le probabilità condizionali $p_1^{(1)} = P(A \mid H_A)$ ecc. si calcolano come segue:

$$p_1^{(1)} = P(A \mid H_A) = \frac{P(A \wedge H_A)}{P(H_A)} = \frac{P(A) * P(H_A \mid A)}{P(H_A)} = \frac{0.6 * 0.9}{0.66} = 0.818 \text{ quindi } p_2^{(1)} = P(B \mid H_A) = 1 - p_1^{(1)} = 0.182\,;$$

$$p_1^{(2)} = P(A \mid H_B) = \frac{P(A \wedge H_B)}{P(H_B)} = \frac{P(A) * P(H_B \mid A)}{P(H_A)} = \frac{0.6 * 0.1}{0.34} = 0.176 \text{ quindi } p_2^{(2)} = P(B \mid H_B) = 1 - p_1^{(2)} = 0.824\,.$$

Per calcolare i guadagni attesi $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$ condizionati rispettivamente alle risposte H_A , H_B del sondaggio bisogna compilare la tabella come nella "prima puntata", sostituendo alle probabilità *a priori* di A e B una volta quelle condizionate alla risposta H_A del sondaggio, un'altra volta alla risposta H_B . Di seguito, le due tabelle "condizionate", precedute dalla tabella relativa all'assenza d'informazione.

	d1	d2	probabilità
A	0,1	-0,3	0,6
B	0,1	1	0,4
Medie	0,1	0,22	

	d1	d2	probabilità|HA
A	0,1	-0,3	0,818
B	0,1	1	0,182
Medie	0,1	-0,0634	

	d1	d2	probabilità|HB
A	0,1	-0,3	0,176
B	0,1	1	0,824
Medie	0,1	0,7712	

Si ricava $\bar{x}^{(1)} = 0.1$, $\bar{x}^{(2)} = 0.7712$ e quindi

$$\bar{x}^{(\mathcal{H})} = 0.1 * 0.66 + 0.7712 * 0.34 = 0,\,3282$$

Il guadagno atteso in assenza di informazione, visibile dalla prima tabella, è $\bar{x} = 0,\,22$; perciò il valore dell'informazione che si può acquisire attraverso il sondaggio è

$$v^{(\mathcal{H})} = \bar{x}^{(\mathcal{H})} - \bar{x} = 0,\,1082$$

Notiamo che i tre valori $\bar{x}$, $\bar{x}^{(\mathcal{H})}$, $\bar{\bar{x}}$ valgono rispettivamente 0.22 ; 0.3282 ; 0.46 ; essi, conformemente a quanto dimostrato in generale, formano una sequenza crescente. Segnaliamo che non è escluso che fra due dei tre valori considerati, o anche fra tutti e tre, possa valere l'uguaglianza, ossia che l'informazione parziale o perfetta possano avere valore nullo.

Uso di una informazione e suo valore, quando si adotta una funzione utiità

Che l'acquisizione di una informazione abbia un valore economico si comprende anche a buon senso: l'informazione può indurre a prendere una decisione diversa da quella che si sarebbe assunta in sua mancanza, questo conduce a un aumento del guadagno atteso. Nel caso del nostro esempio, la decisione suggerita dal criterio del massimo guadagno atteso, in assenza di informazioni ulteriori, è d_2. Se però abbiamo a disposizione l'informazione legata al sondaggio, e questa dà il risultato H_A , cioè prevede l'elezione di A, la tabelle di riferimento è la seconda, quella con le probabilità $\mid H_A$, e in questo caso la decisione che viene indicata è d_1 . I calcoli svolti sopra quantificano questo valore.
Se la valutazione dei guadagni avviene non più attraverso il loro importo monetario, bensì attraverso una funzione utilità *u,* per calcolare il valore dell'informazione occorre riconvertire le utilità attese nei rispettivi valori monetari.

L'utilità è infatti un numero di riferimento utile per dei *confronti*, vale a dire per indirizzare la decisione nella direzione che dà una utilità attesa maggiore, ma quest'ultima *non rappresenta* un valore monetario.

Una funzione utilità (cioè strettamente crescente e concava) è un caso particolare di funzione caratterizzante una *media associativa* per variabili aleatorie scalari. Di questo argomento parliamo più in dettaglio in una dispensa espressamente dedicata a questo argomento; qui di seguito riportiamo i fatti essenziali.

Lotterie semplici e composte.

Chiamiamo *Lotteria*, o *Lotteria semplice*, una qualunque variabile aleatoria scalare X.
Chiamiamo *Lotteria composta* una lotteria (cioè una variabile aleatoria Z) che si può descrivere nel seguente modo: sono date due lotterie semplici X, Y e un numero $\alpha \in]0, 1[$; definiamo Z attraverso la sua funzione ripartizione F_Z , nel modo seguente: per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = \alpha\, P(X \le t) + (1 - \alpha)\, P(Y \le t)$$

vale a dire

$$F_Z = \alpha\, F_X + (1 - \alpha)\, F_Y$$

dove F_X e F_Y rappresentano le funzioni ripartizione rispettivamente di X e di Y. Diremo che Z è la lotteria composta da X e Y con pesi rispettivi α e $(1 - \alpha)$.
In pratica si può pensare a Z come al premio che si vincerà giocando come segue: X e Y sono due lotterie (in senso ingenuo), ciascuna della quali ha il suo regolamento di assegnazione dei premi, ossia la sua distribuzione di probabilità per i valori che le sono consentiti. Con probabilità α riceviamo il biglietto della lotteria X; con probabilità $(1 - \alpha)$ riceviamo quello di Y. Z rappresenta l'importo aleatorio che vinceremo giocando con queste regole.

Valori medi associativi per una variabile aleatoria

La media $E(X)$ di una variabile aleatoria X è, anche nelle applicazioni pratiche, un *indice sintetico* della grandezza dei valori di X (statura media di una popolazione; reddito medio; temperatura media in un certo luogo, ecc.). $E(X)$ tuttavia non è l'unico indice sintetico possibile per i valori di X, e non sempre è il più opportuno; altri valori medi (media geometrica, media armonica, per esempio) sono più adeguati in certe situazioni. Una varietà di valori medi per variabili aleatorie discrete o continue si può ottenere nel seguente modo:

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e sufficientemente regolare. Sia X una variabile aleatoria con valori in I. Chiamiamo *valore medio di X* associato alla funzione u il numero

$$M_u(X) = u^{-1}(E(u(X))$$

(il quale esiste se esiste la media $E(u(X))$).

Per esempio, per una variabile aleatoria discreta con valori positivi, che assume i seguenti valori:

valori di X	x_1	x_2	…	x_n
probabilità	p_1	p_2	…	p_n

si ha

$$M_u(X) = u^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k * u(x_k)\right)$$

mentre per una variabile X assolutamente continua con densità f si ha

$$M_u(X) = u^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} u(x) * f(x)\, dx\right)$$

purché esista l'integrale al secondo membro.

Evidentemente il valore medio associato a $u(x) = x$ è la consueta media $E(X)$; invece, ad esempio, il valore medio associato alla funzione $u(x) = \ln x$ per una variabile discreta con valori positivi è

$$M_u(X) = \exp(p_1 \ln(x_1) + p_2 \ln(x_2) + \ldots + p_n \ln(x_n)) = x_1^{p_1} * x_2^{p_2} * \ldots * x_n^{p_n}$$

cioè la *media geometrica pesata* di X.

I valori medi associati a una funzione u nel modo sopra descritto sono *associativi.* In questo contesto il significato del termine è il seguente:

Siano Z, Z' due lotterie composte; precisamente Z composta da X, Y con pesi α, $(1-\alpha)$; Z'' composta da X', Y con gli stessi pesi α, $(1-\alpha)$; supponiamo inoltre che

$$M_u(X) = M_u(X'), \text{ oppure } M_u(X) < M_u(X'), \text{ oppure } M_u(X) > M_u(X')$$

Allora, rispettivamente:

$$M_u(Z) = M_u(Z'), \text{ oppure } M_u(Z) < M_u(Z'), \text{ oppure } M_u(Z) > M_u(Z').$$

Questo si può interpretare così: pensiamo a $M_u(\bullet)$ come a un criterio di scelta fra lotterie, nel senso di preferire tra due lotterie quella per la quale M_u è più grande. Ebbene, se due lotterie X, X' ci sono indifferenti in termini di M_u , oppure una delle due è preferibile all'altra, la stessa cosa accadrà per le lotterie composte da X e Y oppure da X' e Y.

***Guadagni medi associati a una funzione utilità** u.*

La decisione tra due o più guadagni aleatori X, Y, … mediante le rispettive *utilità attese* $E(u(X))$, $E(u(Y)$ equivale a confrontare X, Y attraverso i rispettivi valori medi $M_u(X)$, $M_u(Y)$ perché una funzione utilità è strettamente crescente; perciò anche u^{-1} è strettamente crescente cosicché l'uguaglianza o disuguaglianza tra $E(u(X))$, $E(u(Y))$ si mantiene tra $M_u(X)$, $M_u(Y)$. Finché interessa soltanto stabilire la *preferenza* o *indifferenza* tra X e Y non occorre quindi calcolare $M_u(X)$, $M_u(Y)$ applicando u^{-1}. Questo è invece necessario se si vuole calcolare l'*equivalente monetario certo* di un guadagno aleatorio X.
Se consideriamo un guadagno aleatorio degenere che vale C con probabilità 1, ogni funzione utilità u darà $M_u(C) = C$; quindi, se X è un guadagno aleatorio tale che $M_u(X) = C$, il criterio di decisione associato all'utilità u valuterà X indifferente al guadagno certo C. Quanto più u è una funzione utilità "prudente", ossia avversa al rischio, tanto minore sarà l'equivalente monetario $M_u(X)$ di un guadagno aleatorio fortemente variabile nei valori che può assumere. Vediamo qualche esempio.

Ci riferiamo ancora all'esempio dell'«imprenditore edile», riprendiamo la "quarta puntata", e calcoliamo ancora le tabelle corrispondenti all'applicazione delle funzioni utilità $u(x) = a * \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$, con valori di a uguali a 1; 1,5; 2; 4; 100, mostrando però come risultati non più le *utilità attese* bensì i *valori medi con utilità* u, cioè le $M_u(X)$. Serve l'espressione della funzione inversa di u. Da

$y = a * \left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ si ricava $x = -a \ln\left(1 - \frac{y}{a}\right) \equiv u^{-1}(y)$. Le caselle "guadagno certo equivalente" riportano i valori $M_u(X_j)$ delle variabili corrispondenti alle colonne soprastanti

1) Senza informazione.

	d1	d2	probabilità
E	0,1	-0,3	0,6
non E	0,1	1	0,4
Medie	0,1	0,22	
«guadagno certo equivalente» Mu(•) se *a* vale:			
1	0,10000	0,04388	
1,5	0,10000	0,09567	
2	0,10000	0,12436	
4	0,10000	0,17058	
100	0,10000	0,21797	

Si vede che nel caso di d_1 il valore certo equivalente è sempre lo stesso, uguale a 0,1; ciò è ovvio, perché d_1 porta a un guadagno certo di importo noto, uguale a 0,1 M€. Nella colonna corrispondente a d_2 i valori dipendono da a; il confronto con quelli della colonna relativa a d_1 mantiene le disuguaglianze che valevano tra le *utlità attese*, come avevamo già osservato in generale, cioè "suggerisce" per ciascun a la stessa decisione alla quale saremmo giunti con la tabella dei guadagni attesi. In generale, il guadagno certo equivalente, adottando una determinata funzione utilità u, è

$$\bar{z} = \max\{M_u(X_1),\ M_u(X_2)\}$$

2) Con informazione.

Se decidiamo di acquisire l'informazione $\mathcal{H}$, la risposta che avremo da $\mathcal{H}$ cambierà la valutazione delle probabilità degli eventi E_i , e questo darà luogo a una diversa valutazione del «guadagno certo equivalente» condizionata alla risposta ottenuta. Nel nostro esempio, riprendendo i valori come già calcolati nella "quarta puntata" abbiamo:

• *In caso di risposta* H_A :

	d1	d2	probabilità | HA
E	0,1	-0,3	0,818
non E	0,1	1	0,182
Medie	0,1	-0,0634	
«guadagno certo equivalente» Mu(•) se *a* vale:			
1	0,10000	-0,15798	
1,5	0,10000	-0,13277	
2	0,10000	-0,11799	
4	0,10000	-0,09272	
100	0,10000	-0,06465	

quindi in questo caso il guadagno certo equivalente è $\bar{z}^{(H_A)} = 0.1$, per tutte le funzioni utilità considerate; in generale sarebbe

$$\bar{z}^{(H_A)} = \max\{M_u(X_1 \mid H_A),\ M_u(X_2 \mid H_A)\}$$

• *In caso di risposta* H_B :

	d1	d2	probabilità|HB
E	0,1	-0,3	0,176
non E	0,1	1	0,824
Medie	0,1	0,7712	
«guadagno certo equivalente» Mu(•) se *a* vale:			
1	0,10000	0,61488	
1,5	0,10000	0,67407	
2	0,10000	0,70120	
4	0,10000	0,73839	
100	0,10000	0,76997	
0,2	0,10000	0,04605	

Per tutti i valori di a considerati nei casi precedenti si è condotti questa volta alla decisione d_2 , con guadagno certo equivalente $\overline{z}^{(H_B)}$ tratto in questo caso dalla colonna di d_2 ; non è detto che vada sempre così: per chiarire questo punto abbiamo aggiuntola riga corriapondente ad $a = 0.2$, indice di una bassissima propensione al rischio; con questo a, risulta ancora preferibile d_1 , ad evitare il rischio della perdita che si avrebbe scegliendo d_2 in caso si verifichi l'evento B. In generale è

$$\overline{z}^{(H_B)} = \max\{M_u(X_1 \mid H_B),\ M_u(X_2 \mid H_B)\}$$

Comunque, stabilita la funzione utilità u, si calcola il guadagno certo equivalente $\overline{z}^{(H_B)}$. Perciò, se si decide di acquisire l'informazione, al guadagno certo equivalente $\overline{z}$ calcolato in assenza d'informazione si sostituisce la lotteria Z che dà i seguenti guadagni:

valori di Z	$\overline{z}^{(H_A)}$	$\overline{z}^{(H_B)}$
probabilità	$\varrho_A = P(H_A)$	$\varrho_B = P(H_B)$

Notiamo che in generale gli $\overline{z}^{(H_\cdot)}$ non sono effettivi valori certi; nel nostro esempio lo è $\overline{z}^{(H_A)} = 0.1$, ma non $\overline{z}^{(H_B)}$; conveniamo però di trattarli come valori certi.
Per valutare il beneficio ottenuto sostituendo il guadagno certo equivalente con la lotteria Z bisogna adesso calcolare il guadagno certo equivalente al guadagno aleatorio proveniente da Z, sempre attraverso la funzione utilità u, cioè il valore

$$\overline{z}^{(\mathcal{H})} = M_u(Z) = u^{-1}(\varrho_A * u(\overline{z}^{(H_A)}) + \varrho_B * u(\overline{z}^{(H_B)}))$$

Il valore dell'informazione $\mathcal{H}$ è pertanto $v^{(\mathcal{H})} = \overline{z}^{(\mathcal{H})} - \overline{z}$, con $\overline{z}^{(\mathcal{H})}$ e $\overline{z}$ definiti come descritto.

Semplificazione del calcolo di $\overline{z}^{(\mathcal{H})}$ e $\overline{z}$

Abbiamo ragionato sopra calcolando ogni volta le medie $M_u(\bullet)$ associate a u, ossia i «guadagni certi equivalenti» per rendere più chiaro possibile il ragionamento; in effetti il procedimento di calcolo può essere semplificato tenendo presente che u è strettamente crescente, vediamo come.
Abbiamo definito

$$\overline{z}^{(H_A)} = \max\{M_u(X_1 \mid H_A),\ M_u(X_2 \mid H_A)\} = \max\left\{u^{-1}(E(u(X_1) \mid H_A)),\ u^{-1}(E(u(X_2) \mid H_A))\right\}$$

ma questa, siccome u^{-1} è strettamente crescente, si può anche scrivere

$$\overline{z}^{(H_A)} = u^{-1} \max\{E(u(X_1) \mid H_A),\ E(u(X_2) \mid H_A)\}$$

e analogamente

$$\overline{z}^{(H_B)} = u^{-1} \max\{E(u(X_1) \mid H_B),\ E(u(X_2) \mid H_B)\}$$

Si deduce allora che

$$u(\bar{z}^{(H_A)}) = \max\{E(u(X_1) \mid H_A),\ E(u(X_2) \mid H_A)\} \equiv \bar{y}^{(H_A)} \text{ (utilità attesa condizionata ad } H_A)$$
$$u(\bar{z}^{(H_B)}) = \max\{E(u(X_1) \mid H_B),\ E(u(X_2) \mid H_B)\} \equiv \bar{y}^{(H_B)} \text{ (utilità attesa condizionata ad } H_B)$$

cosicché

$$\bar{z}^{(\mathcal{H})} = M_u(Z) = u^{-1}(\varrho_A * \bar{y}^{(H_A)} + \varrho_B * \bar{y}^{(H_B)})$$

e anche $\bar{z}$ si calcola più semplicemente, ragionando nello stesso modo:

$$\bar{z} = \max\{M_u(X_1),\ M_u(X_2)\} = \max\{u^{-1}(E(u(X_1))),\ u^{-1}(E(u(X_2)))\} =$$
$$= u^{-1}\max\{E(u(X_1)),\ E(u(X_2))\} = u^{-1}(\bar{y})$$

cioè

$$\bar{z} = u^{-1}(\bar{y}) \quad \text{con} \quad \bar{y} = \max\{E(u(X_1)),\ E(u(X_2))\} \text{ (utilità attesa)}$$

Se il calcolo viene svolto con uno strumento di calcolo (per esempio *Excel*), queste semplificazioni appaiono abbastanza irrilevanti, altrimenti è utile tenerne conto. Svolgiamo i calcoli nel nostro solito esempio. Servono allora tabelle analoghe alle tre ultime che abbiamo scritto, recanti non più i valori delle medie $M_u(X_j)$, condizionate alle informazioni oppure no, bensì $\bar{y}$, $\bar{y}^{(H_A)}$, $\bar{y}^{(H_B)}$; eccole qui di seguito; la prima delle tre tabelle è quella della "seconda puntata", con l'aggiunta della riga relativa ad $a = 0.2$.

Senza informazione:

	d1	d2	probabilità
E	0,1	-0,3	0,6
non E	0,1	1	0,4
Medie	0,1	0,22	
Utilità attese se *a* vale:			
1	0,09516	0,04293	
1,5	0,09674	0,09269	
2	0,09754	0,12057	
4	0,09876	0,16700	
100	0,09995	0,21774	
0,2	0,07869	-0,33834	

Con informazione

	d1	d2	probabilità|HA
E	0,1	-0,3	0,818
non E	0,1	1	0,182
Medie	0,1	-0,0634	
Utilità attese se *a* vale:			
1	0,09516	-0,17114	
1,5	0,09674	-0,13882	
2	0,09754	-0,12154	
4	0,09876	-0,09380	
100	0,09995	-0,06468	
0,2	0,07869	-0,53345	

	d1	d2	probabilità|HB
E	0,1	-0,3	0,176
non E	0,1	1	0,824
Medie	0,1	0,7712	
Utilità attese se *a* vale:			
1	0,09516	0,45929	
1,5	0,09674	0,54297	
2	0,09754	0,59147	
4	0,09876	0,67424	
100	0,09995	0,76701	
0,2	0,07869	0,04113	

I valori di $\bar{y}$, $\bar{y}^{(H_A)}$, $\bar{y}^{(H_B)}$ corrispondenti a ciascun valore di a si leggono nelle tabelle sulle righe che al primo posto recano il valore di a; la regola è prendere la *massima* tra le due utilità attese; per esempio, se $a = 2$ abbiamo

$$\bar{y} = 0.12057, \qquad \bar{y}^{(H_A)} = 0.09754, \qquad \bar{y}^{(H_B)} = 0.59147$$

Abbiamo precedentemente calcolato i valori di $\varrho_1 = P(H_A) = 0.66$ e $\varrho_2 = P(H_B) = 0.34$; calcoliamo $\bar{z}$ e $\bar{z}^{(\mathcal{H})}$ nel modo indicato sopra. Riprendiamo l'espressione di $v(y) = u^{-1}(y)$:

```
v[y_] := -a * Log[1 - y/a];
a = 2; ϱ1 = 0.66; ϱ2 = 0.34; y̅ = 0.12057; y̅1 = 0.09754; y̅2 = 0.59147;
z̅ = v[y̅]; z̅H = v[ϱ1 * y̅1 + ϱ2 * y̅2];
Print[z̅]; Print[z̅H];
Print["il valore dell'informazione è z̅H-z̅="];
Print[z̅H - z̅]
```

```
0.124357

0.284829

il valore dell'informazione è z̅H-z̅=

0.160471
```

Vediamo come vanno le cose nel caso molto "prudente" di $a = 0.2$.

```
v[y_] := -a * Log[1 - y/a];
a = 2; ϱ1 = 0.66; ϱ2 = 0.34; y̅ = 0.07869; y̅1 = 0.07869; y̅2 = 0.07869;
z̅ = v[y̅]; z̅H = v[ϱ1 * y̅1 + ϱ2 * y̅2];
Print[z̅]; Print[z̅H];
Print["il valore dell'informazione è z̅H-z̅="];
Print[z̅H - z̅]
```

```
0.0802799

0.0802799

il valore dell'informazione è z̅H-z̅=

0.
```

Il valore dell'informazione è in questo caso nullo, e se ne comprende la ragione: nel caso $a = 0.2$ la decisione suggerita è d_1 , qualunque sia la risposta dell'informazione H; d_1 è la decisione suggerita anche in assenza di informazione; l'acquisizione di H non cambia in nessun caso la decisione, risulta quindi irrilevante ai fini della decisione da assumere, ed è quindi logico che non si debba essere disposti a pagare alcunché per acquisirla.

Riassunto delle formule per il calcolo di $\overline{z}^{(\mathcal{H})}$ e $\overline{z}$ e conseguentemente, del valore dell'informazione $\mathcal{H}$, applicando una funzione utilità *u.*

Abbiamo ricavato sopra le espressioni per $\overline{z}^{(\mathcal{H})}$ e $\overline{z}$, “guadagni certi equivalenti” in presenza dell'informazione $\mathcal{H}$ e in sua assenza, e il conseguente valore di $\mathcal{H}$ come loro differenza, riferendoci a un esempio in cui $\mathcal{H}$ può dare luogo a *due* sole risposte, e due sono anche gli eventi E_i che condizionano i guadagni, come pure due sono le possibili decisioni; le regole si estendono senza variazioni di sostanza al caso generale in cui $\mathcal{H}$ può dare r risposte H_k , $k = 1, 2, \ldots, r$, con probabilità rispettive ϱ_k , gli eventi sono E_i , $i = 1, 2, \ldots, m$ e le decisioni possibili sono d_j , $j = 1, 2, \ldots, n$ nel modo seguente:

Guadagno certo equivalente in assenza di informazione:

$$\overline{z} = u^{-1}(\overline{y}) \quad \text{con} \quad \overline{y} = \max\{E(u(X_j)),\ j = 1, 2, \ldots, n\} \ \text{(utilità attesa)}$$

Guadagno certo equivalente condizionato alla risposta H_k ***dell'informazione*** $\mathcal{H}$

$$\overline{z}^{(H_k)} = u^{-1}(\overline{y}^{(H_k)}) \ \text{con} \ \overline{y}^{(H_k)} = \max\{E(u(X_j) \mid H_k),\ j = 1, 2, \ldots, n\} \ \text{(utilità attesa condizionata ad } H_k\text{)}$$

Guadagno certo equivalente in presenza dell'informazione $\mathcal{H}$

$$\overline{z}^{(\mathcal{H})} = M_u(Z) = u^{-1}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{r} \varrho_k * \overline{y}^{(H_k)}\right)$$

Valore dell'informazione $\mathcal{H}$

$$v^{(\mathcal{H})} = \overline{z}^{(\mathcal{H})} - \overline{z}$$

Con lo stesso tipo di ragionamenti, in una situazione ancora più semplice, si calcola il guadagno certo equivalente in presenza di *perfetta informazione*, in relazione a una determinata funzione utilità u :

Utilità attesa in presenza dell'informazione perfetta

$$\overline{\overline{y}} = \textstyle\sum_{i=1}^{m} p_i * u(\overline{x}_i) \quad \text{con} \quad \overline{x}_i = \max\{x_{i,j}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Guadagno certo equivalente in presenza dell'informazione perfetta

$$\overline{\overline{z}} = u^{-1}(\overline{\overline{y}})$$

Valore dell'informazione perfetta

$$v = \overline{\overline{z}} - \overline{z}$$

Per chiarire, calcoliamo il valore dell'informazione perfetta nel solito esempio del costruttore edile. Incominciamo con il caso di $a = 2$.

```
u[x_] := a * (1 - ⅇ^(-x/a));
v[y_] := -a * Log[1 - y/a];
a = 2; p1 = 0.6; p2 = 0.4; ȳ = 0.12057; x̄1 = 0.1; x̄2 = 1.;
z̄ = v[ȳ]; z̿ = v[p1 * u[x̄1] + p2 * u[x̄2]];
Print[
  "i guadagni certi equivalenti, con informazione perfetta o senza, sono"];
Print[z̿];
Print[z̄];
Print["il valore dell'informazione perfetta è z̿-z̄="];
Print[z̿ - z̄]
```

```
i guadagni certi equivalenti, con informazione perfetta o senza, sono
0.413188
0.124357
il valore dell'informazione perfetta è z̿-z̄=
0.28883
```

E ora lo stesso, con $a = 0.2$.

```
u[x_] := a * (1 - ⅇ^(-x/a));
v[y_] := -a * Log[1 - y/a];
a = 0.2; p1 = 0.6; p2 = 0.4; ȳ = 0.07869; x̄1 = 0.1; x̄2 = 1.;
z̄ = v[ȳ]; z̿ = v[p1 * u[x̄1] + p2 * u[x̄2]];
Print[
  "i guadagni certi equivalenti, con informazione perfetta o senza, sono"];
Print[z̿];
Print[z̄];
Print["il valore dell'informazione perfetta è z̿-z̄="];
Print[z̿ - z̄]
```

```
i guadagni certi equivalenti, con informazione perfetta o senza, sono
0.200689
0.1
il valore dell'informazione perfetta è z̿-z̄=
0.100689
```

Si vede che una diversa funzione utilità condiziona anche il valore della perfetta informazione, riducendolo quando si passa da una determinata funzione utilità a un’altra più prudente; questo si spiega considerando che il costo dell’informazione costituisce in sé l’assunzione di un rischio perché diminuisce dello stesso importo il guadagno netto che si conseguirà. Nel caso presente, se si acquista l’informazione perfetta al prezzo massimo calcolato sopra, ed essa si concretizza avvisandoci che accade *A*, avremo un ricavo pari a 0.1 M€. Questo, diminuito del costo sopportato per ottenere l’informazione, porta in questo caso a realizzare una perdita, anche se non molto elevata.